Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

37ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας

Θέμα:
Τα Μαθηματικά ως πυλώνας
της διεπιστημονικής προσέγγισης
στα σύγχρονα οικουμενικά προβλήματα

Τόμος Α΄
Πρακτικά 2020

Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση

Ιωάννης Ρίζος
ioarizos@uth.gr

Γεώργιος Κολοκοτρώνης
gkolokotr@uth.gr

Αικατερίνη-Μαρία Παπανικολάου
aipapanikolaou@uth.gr
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μαθηματικών

Θεματική ενότητα: *Η ταυτότητα των Μαθηματικών μέσα στην αλληλεπίδραση της μαθηματικής επιστήμης με τις εφαρμογές της*

Περίληψη

Ένα σημαντικό ερευνητικό ερώτημα που απασχολεί τη Διδακτική των Μαθηματικών είναι το εάν και με ποιους τρόπους μπορεί η Ιστορία των Μαθηματικών να ενσωματωθεί στη διδασκαλία τους. Στην παρούσα εργασία μελετάμε ορισμένα σχετικά θεωρητικά θέματα και παρουσιάζουμε τον σχεδιασμό και τα αποτελέσματα μιας ποιοτικής έρευνας που πραγματοποιήσαμε σε πανεπιστημιακό τμήμα, με αντικείμενο τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη σε συγκεκριμένο πολιτισμικό πλαίσιο.

Λέξεις κλειδιά: Ιστορία των Μαθηματικών, Διδακτική των Μαθηματικών, γεωμετρικές κατασκευές, τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Abstract

An important research question that concerns Mathematics Education is whether and how the History of Mathematics can be integrated in the teaching of Mathematics. In this paper we study some relevant theoretical issues and we present the design and the results of a qualitative research we carried out in a university department, on didactic utilization of the History of Mathematics in the teaching of geometric constructions with straightedge and compass in a specific cultural context.

Keywords: History of Mathematics, Mathematics Education, geometrical constructions, tertiary education.

1. Εισαγωγή

Το ζήτημα της συσχέτισης της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη μαθηματική εκπαίδευση είναι αρκετά παλιό – αν και όχι πάντοτε εκπεφρασμένο με σαφή τρόπο. Για παράδειγμα ο Augustus De Morgan, ήδη από το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, είχε επισημάνει πως η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών, συχνά διαφέρει από την "τάξη" με την οποία αυτές είναι τοποθετημένες στο μυαλό ενός μαθηματικού. Είχε τονίσει μάλιστα τον ιδιαίτερο χαρακτήρα των ιστορικών διαδικασιών της μαθηματικής ανακάλυψης, σε αντιπαραβολή με τη σαφήνεια της παρουσίασης των μαθηματικών αποτελεσμάτων υπό το φως των μεταγενέστερων γεγονότων (De Morgan 1865).

Αργότερα, μέσα από τα έργα των Poincaré (1899) και Klein (1909), ξεκινά μια συζήτηση για τη χρησιμότητα της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και εμφανίζεται για πρώτη φορά η ιδέα του «παραλληλισμού». Γενεσιουργός αιτία της ιδέας αυτής στάθηκε ο «θεμελιώδης νόμος της βιογενετικής» (Haeckel 1876) σύμφωνα με τον οποίο η οντογένεση ανακεφαλαιώνει τη φυλογένεση.[1] Ο παραπάνω «παραλληλισμός» βασίζεται στην εξής λογική: Αν από τη μια μεριά η πνευματική ανάπτυξη ενός ανθρώπου ανακεφαλαιώνει την ανάπτυξη του ανθρώπινου γένους, τότε από την άλλη μεριά θα πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών να ακολουθεί την ιστορική τους εξέλιξη.

Ωστόσο, η ιδέα ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να είναι χρήσιμη στη μαθηματική εκπαίδευση πήρε συγκεκριμένη μορφή μόλις τη δεκαετία του '70 με την ίδρυση της ομάδας «International Study Group on

[1] Ο νόμος υπέθετε ότι ένα έμβρυο καθώς αναπτύσσεται την περίοδο της κύησης (οντογένεση), περνάει περιληπτικά από όλα τα στάδια της εξέλιξης του είδους του (φυλογένεση).

the Relations between History and Pedagogy of Mathematics» και άρχισε να συνιστά (και) μέσω αυτής μια νέα, ενεργό ερευνητική περιοχή της μαθηματικής εκπαίδευσης (Τζανάκης 2009). Στις μέρες μας, παρατηρείται έντονη αλληλεπίδραση (όχι πάντοτε χωρίς κριτική) ανάμεσα στην Ιστορία και τη Διδακτική των Μαθηματικών, αλληλεπίδραση η οποία εντοπίζεται κυρίως στην ανταλλαγή εννοιολογικών εργαλείων, καθώς και στον συντονισμό ερευνητικών αποτελεσμάτων από τη μια μεριά και διδακτικών προθέσεων από την άλλη. Ειδικότερα σε ό,τι αφορά τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία της Γεωμετρίας, έχουν γίνει στη χώρα μας αλλά και διεθνώς αξιόλογες προσπάθειες προς αυτή την κατεύθυνση, με μεγαλύτερη ή μικρότερη επιτυχία (π.χ. Swetz 1977, Θωμαΐδης 1990, Ransom 1993, Burns 1997, Taimina & Henderson 2005). Οι Gulikers και Blom (2001) έχουν ταξινομήσει τις προσπάθειες αυτές σε οκτώ κατηγορίες (γεωμετρικοί υπολογισμοί, γεωμετρικές κατασκευές, γεωμετρικοί τόποι, Γεωμετρία και Φυσική κ.λπ.). Από τις παραπάνω κατηγορίες, για τους σκοπούς της μελέτης μας, θα εστιάσουμε στις γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη σε συγκεκριμένο πολιτισμικό πλαίσιο και θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα μιας ποιοτικής έρευνας που διεξαγάγαμε σε τριτοβάθμιο ίδρυμα με θετικά, εν γένει, αποτελέσματα.

2. Θεωρητικό πλαίσιο

Ένα σημαντικό ερευνητικό ερώτημα που απασχολεί τη σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, είναι το εάν και με ποιους τρόπους μπορεί η Ιστορία των Μαθηματικών να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία τους. Σε μια αρχική απόπειρα προσέγγισης αυτού του ερωτήματος, θα βοηθούσε ίσως ο σχηματισμός μιας εικόνας για το πώς έχει ήδη αξιοποιηθεί η Ιστορία των Μαθηματικών μέσα στις αίθουσες διδασκαλίας σε διάφορα σχολεία και πανεπιστήμια ανά τον κόσμο και τι αντίκτυπο είχε η όλη προσπάθεια σε διδάσκοντες και διδασκομένους.

Μια πρώτη ψηφίδα της παραπάνω εικόνας παίρνουμε από την εμπειρία μαθήτριας Λυκείου στην Ιταλία, η οποία συμμετείχε εθελοντικά σε σχετικό διδακτικό πείραμα που οργανώθηκε στο σχολείο της: «*Κάνω στον εαυτό μου περισσότερες ερωτήσεις, δεν μένω πια στο τι μου λένε να μελετήσω, αλλά προσπαθώ να φτάνω σε μια βαθύτερη κατανόηση. Στην αντιμετώπιση των προβλημάτων προχωράω πλέον μεθοδικά, βήμα βήμα. Τα πράγματα πρέπει να εξετάζονται σε βάθος, πρέπει να ερευνάμε τη φύση τους και όχι να τα δεχόμαστε όπως φαίνονται […] Δεν εστιάζω την προσοχή μου σε μια λεπτομέρεια, αλλά εξετάζω το πρόβλημα γενικά, μετασχηματίζοντάς το, αν είναι δυ-*

νατόν, σε ένα απλούστερο» (Furinghetti 1997, σ.57, δική μας απόδοση). Η τελευταία φράση της μαθήτριας είναι ιδιαίτερα σημαντική, ιδίως αν ιδωθεί υπό το πρίσμα του πνεύματος της διδακτικής του Polya (1945), σύμφωνα με το οποίο «όταν δεν μπορείς να λύσεις μία άσκηση, λύσε μία απλούστερη».

Ένα άλλο παράδειγμα, με θετικά μαθησιακά αποτελέσματα, είναι η πρωτοπόρα για την εποχή της δουλειά που έγινε στο Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης (βλ. σχετ. Bos 1976). Όσοι φοιτητές επέλεγαν το μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών ήταν υποχρεωμένοι, εκτός από την παρακολούθηση των διαλέξεων, να μελετήσουν ένα βιβλίο επάνω στην Ιστορία των Μαθηματικών, να το παρουσιάσουν και να γράψουν μια ερευνητική εργασία. Το μεγάλο πλεονέκτημα του μαθήματος στο πρόγραμμα σπουδών φάνηκε ότι ήταν η ευελιξία του να προσαρμόζει μια επιλογή κατάλληλων και σημαντικών θεμάτων σε μια μεγάλη ποικιλία διδακτικών καταστάσεων και προσωπικών ενδιαφερόντων (Bos 1976).

Οι Tzanakis & Arcavi (2000) έχουν καταγράψει συστηματικά τα επιχειρήματα υπέρ της διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Η κεντρική ιδέα (με σαφείς διδακτικές συνέπειες) πίσω από όλα τα επιχειρήματα, είναι η επιστημολογική θέση ότι τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο το *αποτέλεσμα* της διαδικασίας διδασκαλίας και μάθησης θεωριών παρουσιασμένων στην τελική τους μορφή, αλλά και αυτές καθ' αυτές οι *διαδικασίες* που οδηγούν σε αυτά (Τζανάκης 2009). Επιγραμματικά αναφέρουμε εδώ ορισμένα βασικά επιχειρήματα, όπως την εκμάθηση των Μαθηματικών (η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή πληροφοριών και ως γέφυρα με άλλα επιστημονικά πεδία κ.λπ.), την ανάπτυξη απόψεων για τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητας, τον εμπλουτισμό του διδακτικού ρεπερτορίου, την καλλιέργεια θετικών συναισθημάτων προς τα Μαθηματικά και την αναγνώριση των Μαθηματικών ως πολιτισμικού επιτεύγματος.

Ιδιαίτερα η αρχαιοελληνική παράδοση των γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη προσφέρει στους φοιτητές μια καλή ευκαιρία να εργαστούν με τις κλασικές μεθόδους (Gulikers & Blom 2001). Η αξία της εν λόγω παράδοσης έγκειται (και) στην πληθώρα των μαθηματικών προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με αυτή την τεχνική. Επομένως τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται στην παράγραφο 4, θα πρέπει να ιδωθούν εντός του παραπάνω περιγράμματος.

Στον αντίποδα υπάρχουν σημαντικές επιστημολογικές-φιλοσοφικές αντιρρήσεις και πρακτικές δυσκολίες. Οι κυριότερες από αυτές μπορούν να ομαδοποιηθούν σε ενστάσεις σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών (λ.χ. ότι η Ιστορία των Μαθηματικών δεν είναι Μαθηματικά και μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές), με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρή-

ματος (π.χ. ότι η αξιοποίηση πρωτότυπων κειμένων είναι μια δύσκολη υπόθεση που απαιτεί προσεκτικό σχεδιασμό (βλ. Jahnke et al. 2000)), με το υπόβαθρο και τη στάση των διδασκομένων και των διδασκόντων και, τέλος, με τις διαδικασίες αξιολόγησης.

Ακόμη όμως κι αν αποφασίσει κανείς να αξιοποιήσει την Ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία, οφείλει να προβληματιστεί για τον τρόπο με τον οποίο θα το πραγματοποιήσει. Θα θεωρήσει δηλαδή την Ιστορία των Μαθηματικών ως *εργαλείο*, δηλαδή ως ένα μέσο για την εκμάθηση του περιεχομένου των Μαθηματικών, ή ως *στόχο*, προτάσσοντας τον στοχασμό επάνω στην εξέλιξη των Μαθηματικών και στη σχέση που αυτά έχουν με τις άλλες επιστήμες; Συγχρόνως θα πρέπει να τον απασχολήσει η *μορφή* που θα πάρει αυτή η αξιοποίηση, καθώς και το πού θα δοθεί έμφαση αναφορικά με το διδακτικό υλικό (βλ. Tzanakis & Arcavi 2000, Jankvist 2009).

3. Η διδασκαλία του μαθήματος της Ιστορίας των Μαθηματικών σε ένα Πανεπιστημιακό Τμήμα

Στο νεοσύστατο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, το μάθημα επιλογής «Ιστορία των Μαθηματικών» προσφέρεται στο 1ο εξάμηνο σπουδών και ανήκει στην ομάδα μαθημάτων για την απόκτηση πιστοποιητικού Διδακτικής & Παιδαγωγικής Επάρκειας. Σύμφωνα με το περίγραμμα του μαθήματος, εξετάζονται οι ανά τους αιώνες μεταβολές των βασικών μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, καθώς και το έργο των μεγάλων φιλοσόφων και επιστημόνων, οι οποίοι συνέβαλαν στη διαμόρφωση της σύγχρονης φυσικής επιστήμης. Η ύλη του μαθήματος καλύπτει ένα ευρύ φάσμα από τους μεγάλους πολιτισμούς της αρχαιότητας έως την Ευρώπη του 19ου αιώνα, το δε εκπαιδευτικό υλικό είναι προσαρμοσμένο στις απαιτήσεις ενός προπτυχιακού μαθήματος.

Σκοπός του μαθήματος είναι να παρουσιάσει αντιπροσωπευτικά "επεισόδια" από τα Μαθηματικά, μέσα από την οπτική που έχει καθιερώσει η σύγχρονη ιστοριογραφία. Παράλληλα, στοχεύει στο να εξοικειωθούν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες με τη μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών εννοιών και μεθόδων, να γνωρίσουν τα κομβικά σημεία και τις μεγάλες προσωπικότητες που καθόρισαν την εξέλιξη των Μαθηματικών και να αντιληφθούν ότι αυτή η εξέλιξη κάθε άλλο παρά γραμμικό χαρακτήρα είχε.

Πρακτικά, οι διδακτικοί στόχοι δεν έγκεινται μόνο στις μαθηματικές ανακατασκευές αλλά, κυρίως, στη μελέτη των πρωτότυπων κειμένων, προκειμένου οι φοιτητές και οι φοιτήτριες να κατανοήσουν την ουσία των αρχαίων και των νεότερων Μαθηματικών, χωρίς να παραβιάζεται ο εννοιολογικός ορίζοντας της κάθε εποχής. Έτσι λοιπόν το μάθημα ισορροπεί

μεταξύ της διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών που ανακαλύφθηκαν/ επινοήθηκαν ανά τους αιώνες, και της παρουσίασης του τρόπου σκέψης που οδήγησε στα παραπάνω μαθηματικά αποτελέσματα, τοποθετημένης εντός ορισμένου ιστορικού-φιλοσοφικού πλαισίου.

4. Μελέτη περίπτωσης: Η διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών

Η ιστορική και φιλοσοφική βάση επί της οποίας θεωρείται η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι συμφυής με τους γεωμετρικούς τόπους και τις γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Τα πρώτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών απαντώνται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και στηρίζονται στα αιτήματα 1-3 του Βιβλίου Ι. Η πραγμάτευση των προβλημάτων αυτών «συμβάλλει στην κατανόηση των σχημάτων από τους μαθητές με βάση τις ιδιότητές τους καθώς και στην ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί και σε εξωμαθηματικές γνωστικές περιοχές».[2] Πολλές φορές ωστόσο οι διδακτικές προθέσεις και η καθημερινή σχολική πρακτική δεν ακολουθούν τον ίδιο βηματισμό και μεγάλος αριθμός γεωμετρικών κατασκευών παραμένει, τελικά, αναξιοποίητος. Την ίδια στιγμή δεν διασαφηνίζεται το πολιτισμικό πεδίο που επέδρασε στη μορφοποίηση του οικοδομήματος του Ευκλείδη και μένει αναπάντητο το ερώτημα γιατί οι γεωμετρικές κατασκευές πρέπει να γίνονται αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη.

Στο πλαίσιο του μαθήματος «Ιστορία των Μαθηματικών» (βλ. §3), πραγματοποιήσαμε κατά το χειμερινό εξάμηνο 2019-2020 δύο τρίωρες εβδομαδιαίες συναντήσεις με κύριο θέμα τις γεωμετρικές κατασκευές και τον ρόλο των αρχαιοελληνικών φιλοσοφικών ρευμάτων στη διαμόρφωση της μαθηματικής σκέψης. Στις συναντήσεις αυτές συμμετείχε ένας μεγάλος, για τα δεδομένα του Τμήματος, αριθμός (περίπου 40) φοιτητών, ενώ οι υπόλοιποι ενημερώθηκαν από τις σημειώσεις του διδάσκοντα και το πρόσθετο διδακτικό υλικό στην eclass. Έμφαση δόθηκε στις πρωτότυπες πηγές (primary sources) όπως στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, στα *Σχόλια* του Πρόκλου, σε αποσπάσματα από διαλόγους του Πλάτωνα (λ.χ. *Θεαίτητος* 147c-148b) και στα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.

Αφού τέθηκε το ιστορικό και φιλοσοφικό περίγραμμα, οι φοιτητές και οι φοιτήτριες πραγματεύθηκαν συγκεκριμένα προβλήματα σε φύλλα εργασίας (worksheets) που τους διανεμήθηκαν, ξεκινώντας από απλές

[2] Απόσπασμα από τις οδηγίες του Υ.ΠΑΙ.Θ. για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις Α΄ και Β΄ τάξεις Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2019-2020 (σ. 27).

γεωμετρικές κατασκευές (εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του, ισόπλευρο τρίγωνο, διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ίσα τμήματα κ.λπ.) και προχωρώντας σε κατασκευές τετραγωνικών ριζών, στην κατασκευή τετάρτης αναλόγου, στη μέση ανάλογο, σε ισοδύναμα σχήματα, μηνίσκους και κανονικά πολύγωνα. Παράλληλα έγινε χρήση ΤΠΕ (πρόγραμμα παρουσιάσεων, πρόσβαση στο διαδίκτυο κ.λπ.), ενώ οι φοιτητές και οι φοιτήτριες είχαν τη δυνατότητα κατά τη διάρκεια των δύο εβδομάδων που διήρκεσε η έρευνα (αλλά και για ολόκληρο το εξάμηνο) να επικοινωνούν με τον διδάσκοντα και μεταξύ τους μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου και μηνυμάτων στην πλατφόρμα του eclass, ώστε να υπάρχει η μέγιστη δυνατή αλληλεπίδραση.

Επιπρόσθετα, ανατέθηκαν σε μικρές ομάδες φοιτητών και φοιτητριών σχετικές, προαιρετικές, ερευνητικές εργασίες βασισμένες σε ιστορικά κείμενα (research projects based on history texts), όπως επί παραδείγματι η ανάλυση ενός χωρίου από τον διάλογο *Μένων* (82b-85b) του Πλάτωνα, όπου μελετάται ο διπλασιασμός του τετραγώνου.

Η Ιστορία των Μαθηματικών ενσωματώθηκε στο διδακτικό μας μοντέλο μέσω ενός ευρέως φάσματος θεματολογίας και διδακτικού υλικού (πβ. Tzanakis & Arcavi 2000) ώστε οι φοιτητές και οι φοιτήτριες να εμπλακούν ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία, να αποκτήσουν θετική στάση απέναντι στις γεωμετρικές κατασκευές και, φυσικά, να πετύχουν τους μαθησιακούς τους στόχους. Πιο συγκεκριμένα, ο τρόπος με τον οποίο η Ιστορία των Μαθηματικών αξιοποιήθηκε στη διδασκαλία και τη μάθηση των γεωμετρικών κατασκευών (λαμβάνοντας υπόψη το πολιτισμικό πλαίσιο, τη διαχρονική εξέλιξη των Μαθηματικών και τους ενδογενείς παράγοντες που επηρέασαν αυτή την εξέλιξη) κατά τη διδακτική μας παρέμβαση, μπορεί να ταξινομηθεί στην κατηγορία των προσεγγίσεων βάσει ενοτήτων (modules approaches) (Jankvist 2009). Σε αυτή τη μορφή διδακτικής αξιοποίησης, η Ιστορία των Μαθηματικών εμφανίζεται, κυρίως, ως *στόχος* (βλ. § 2).

Στις τελικές εξετάσεις θέσαμε ορισμένα ερωτήματα, απολύτως συμβατά με τους στόχους του μαθήματος, προκειμένου i) να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις των φοιτητών επάνω στη διαδικασία των γεωμετρικών κατασκευών και ii) να χαρτογραφήσουμε τις στάσεις τους απέναντι στο μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών. Με τα ερωτήματα αυτά δεν επιδιώξαμε να αξιολογήσουμε την ικανότητα των φοιτητών μας απλά και μόνο να επιλύουν ασκήσεις, αλλά να ελέγξουμε το πώς εκλαμβάνουν οι ίδιοι τις "κατασκευές" και πώς ανταποκρίνονται στα προβλήματα που τίθενται στο πλαίσιο του μαθήματος της Ιστορίας των Μαθηματικών, ώστε

να λάβουμε την απαραίτητη ανατροφοδότηση. Εκτός από την παρούσα εργασία, σε επόμενη φάση της έρευνας τα στοιχεία αυτά, σε συνδυασμό και με εκείνα που θα συλλέξουμε το επόμενο ακαδημαϊκό έτος, θα αξιοποιηθούν προκειμένου να σχηματίσουμε μια πληρέστερη εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι στάσεις και οι πεποιθήσεις των φοιτητών για το μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών. Τρία, λοιπόν, απ' τα ερωτήματα που τέθηκαν ήταν:

α) *Στη διπλανή ευθεία* (δίνεται ο άξονας των πραγματικών αριθμών) *να τοποθετήσετε τον αριθμό 2/3*.

β) *Να κατασκευάσετε τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο τρίγωνο*.

γ) *Ένας φίλος σας είναι φοιτητής σε κάποια Σχολή στην οποία προσφέρεται ως μάθημα επιλογής η Ιστορία των Μαθηματικών. Θα του προτείνατε να επιλέξει το μάθημα; Αν ναι, πώς θα επιχειρηματολογούσατε*;

Εφόσον η έρευνά μας είναι ποιοτική και στοχεύει να μελετήσει σε βάθος τα αποτελέσματα μιας συγκεκριμένης διδασκαλίας (των γεωμετρικών κατασκευών στο πλαίσιο της Ιστορίας των Μαθηματικών), η μεθοδολογία που κρίθηκε κατάλληλη προκειμένου να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα, ήταν εκείνη η οποία συνδύαζε συλλογή δεδομένων σε μορφή ασκήσεων εντός του "φυσικού περιβάλλοντος" του αμφιθεάτρου και ανοιχτές ερωτήσεις ώστε να έρθει στην επιφάνεια τι σκέφτονται οι συμμετέχοντες και γιατί (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου 2005, σσ. 242-243).

5. Συζήτηση και συμπεράσματα

Η πλειονότητα των συμμετεχόντων στην έρευνα (60% περίπου), αντιμετώπισε επαρκώς τα δύο πρώτα ερωτήματα. Σε συνδυασμό με τις απαντήσεις που έδωσε στα υπόλοιπα ζητήματα της εξέτασης και με την εμπλοκή που επέδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας, μπορούμε να πούμε ότι οι μαθησιακοί στόχοι επιτεύχθηκαν σε μεγάλο βαθμό. Ταυτόχρονα, όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα, οι φοιτητές και οι φοιτήτριες έδειξαν να αντιλαμβάνονται όχι μόνο τη λειτουργία αλλά και την αξία των γεωμετρικών κατασκευών, καθώς και το πώς αυτές επηρέασαν την εξέλιξη των Μαθηματικών μέχρι και την ανακάλυψη της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Θα πρέπει να ειπωθεί ωστόσο ότι υπήρξε ένα ποσοστό γύρω στο 25% που δεν απάντησε καθόλου στα ερωτήματα αυτά.

Μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον όμως παρουσιάζουν και κάποιες μεμονωμένες απαντήσεις (γίνεται χρήση ψευδωνύμων):

Στο ερώτημα α) η **Βάσω** και ο **Γιάννης** μετατρέπουν το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό και εν συνεχεία το τοποθετούν στον άξονα, εξηγώντας ότι πρόκειται για διαδικασία «στο περίπου, επειδή δεν είναι ακέραιος αριθμός».

Η **Ελένη** απαντώντας στο ερώτημα β) γράφει ότι «για να κατασκευάσω ένα τετράγωνο ισοδύναμο με ένα τρίγωνο πρέπει να *μετρήσω* τις πλευρές του δοσμένου τριγώνου *με κανόνα και διαβήτη* και να υπολογίσω ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με του τετραγώνου». Ο **Θωμάς**, η **Μαρία** και η **Έλλη** στο ίδιο ερώτημα θεωρούν ένα τρίγωνο με βάση x και ύψος y, καθώς και ένα τετράγωνο πλευράς z. Για να είναι ισοδύναμα αυτά τα δύο σχήματα «αρκεί $E_{\tau\rho\iota\gamma} = E_{\tau\varepsilon\tau\rho}$ άρα $\frac{1}{2}xy = z^2$ επομένως $z = \sqrt{\frac{1}{2}xy}$». Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζει το ερώτημα και η **Άννα**, η οποία, επιπλέον, δίνει ένα αριθμητικό παράδειγμα με «$x = 8$, $y = 4$ και $z = 4$».

Από τις παραπάνω απαντήσεις γίνεται φανερό ότι είναι τελικά πολύ δύσκολη η υπέρβαση του αλγεβρικού τρόπου σκέψης και η απελευθέρωση από τη "σιγουριά" που αποπνέει ο φορμαλιστικός χαρακτήρας της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών, με τον οποίο τα παιδιά είναι εξοικειωμένα ήδη από το Γυμνάσιο. Οδηγούμαστε επομένως σε ένα παράλληλο συμπέρασμα που καταδεικνύει την "αλγεβροποίηση" της Γεωμετρίας, συμπέρασμα που έρχεται σε συμφωνία με εκείνο μιας παλιότερης έρευνάς μας (Πατρώνης κ.ά. 2018).

Από τις απαντήσεις που πήραμε στο ερώτημα γ) προκύπτει ότι οι φοιτητές και οι φοιτήτριες απέκτησαν θετική στάση απέναντι στο μάθημα της Ιστορίας των Μαθηματικών, αν και δεν ήταν όλοι εξ αρχής θετικά διακείμενοι, όπως για παράδειγμα η **Κική**: «Στο σχολείο άκουγα ιστορία και δεν μου άρεσε καθόλου αλλά αυτό [το μάθημα] είναι αλλιώς. Αν και στην αρχή ήμουν αντιδραστική, κράτησα πολλά πράγματα […] Κάναμε εργασίες, παρουσιάσεις, που για μένα ήταν η πρώτη φορά». Θα έλεγε κανείς πως η φοιτήτρια απαντά έτσι εν μέρει και στις ενστάσεις που εγείρονται κατά της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και συγκεκριμένα σε εκείνες που αφορούν το υπόβαθρο και τη στάση των διδασκομένων (βλ. § 2). Στο ίδιο μήκος κύματος κινείται και η απάντηση της **Έλλης**: «Θα μπορούσε να είναι ένα ενδιαφέρον μάθημα ακόμη και για ανθρώπους που δεν γνωρίζουν Μαθηματικά».

Ένα ακόμη στοιχείο που απορρέει από τις γραπτές απαντήσεις είναι ότι οι φοιτητές και οι φοιτήτριες είδαν τα Μαθηματικά ως μια διαρκώς εξελισσόμενη νοητική διεργασία και συγχρόνως ως ένα πολιτισμικό επίτευγμα. Χαρακτηριστικά είναι τα σχόλια του **Γιώργου**, ο οποίος στο ερώτημα γ) συνταιριάζει και τις γεωμετρικές κατασκευές: «Θα σε κάνει να δεις τον κό-

σμο με μια πιο καθαρή ματιά, καθώς θα γνωρίσεις ότι η εξέλιξη της λογικής βασίστηκε σε τόσο *πρωτόγονα εργαλεία* όπως *ο κανόνας και ο διαβήτης*, που θα αναθεωρήσεις τις δυνατότητες του ανθρώπινου νου» και του **Δημήτρη**: «Μέσω των εργασιών που παραδίδονται ο φοιτητής κάνει δική του έρευνα πάνω σε σπουδαίους ανθρώπους και στις ιδέες τους, εξοικειώνεται με το παρελθόν και αλλάζει σε ένα βαθμό τον τρόπο σκέψης του».

Σημειώνουμε, κλείνοντας, ότι όλοι οι φοιτητές επέδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το μάθημα, όπως φάνηκε και από τα αποτελέσματα της αξιολόγησης από τους ίδιους στο τέλος του εξαμήνου, και ανέπτυξαν, ίσως για πρώτη φορά, σοβαρή ερευνητική δραστηριότητα (εργασία σε ομάδες, μελέτη στη βιβλιοθήκη, αναζήτηση υλικού, εκπόνηση εργασιών, παρουσιάσεις κ.ά.). Είδαν τα Μαθηματικά ως ένα επίτευγμα του παγκόσμιου πολιτισμού που λειτουργεί ως βάση και για άλλα επιστημονικά πεδία, ενώ παρατήρησαν μια διαλεκτική σχέση μεταξύ της εξέλιξης των Μαθηματικών και των εκάστοτε κοινωνικών μετασχηματισμών.

Ο διάλογος για την αξιοποίηση ή όχι της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία συνεχίζεται, εφόσον συνεχώς αναδύονται νέα, βάσιμα επιχειρήματα και από τις δύο πλευρές. Παράλληλα συνεχίζεται και η διδακτική μας παρέμβαση, με απώτερο στόχο να διερευνηθούν οι προϋποθέσεις και τα όρια των δυνατοτήτων αυτής της αξιοποίησης.

Αναφορές

Bos, H.J.M. (1976). History of Mathematics in the mathematics curriculum at Utrecht University. *Historia Mathematica*, 3(4), 473-476.

Burns, S. (1997). The Babylonian Clay Tablet. *Mathematics Teaching*, 158, 44-45.

De Morgan, A. (1865). Speech of Professor De Morgan. *Proceedings of the London Mathematical Society 1865-1866*, 1, 1-9.

Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case studies in linking different domains. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 55-61.

Gulikers, I. & Blom, K. (2001). “A Historical Angle”, A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223-258.

Haeckel, E. (1876). *The history of creation, or, The development of the earth and its inhabitants by the action of natural causes*. London: Henry S. King & Co.

Θωμαΐδης, Ι. (1990). Ιστορικές Παρεκβάσεις στο Μάθημα της Γεωμετρίας. *Ευκλείδης Γ*, 25, 27-41.

Jahnke, H. N. with Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., da Silva, C.M.S and Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds) *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer, pp. 291-328.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 235-261.

Klein, F. (1909). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II: Geometrie*. Leipzig: B. G. Teubner.

Poincaré, H. (1899). La Logique et L'Intuition dans la Science Mathématique et dans L'Enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 157-162.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press.

Παπαναστασίου, Κ. & Παπαναστασίου, Ε. (2005). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*. Λευκωσία.

Πατρώνης, Τ., Ρίζος, Ι. & Παπαδοπούλου, Α. (2018). Από τη βασική Αριθμητική και Γεωμετρία στην Αλγεβροποίησή τους και στα Εκπαιδευτικά Λογισμικά: Μια αλλαγή Παραδείγματος στην Εκπαιδευτική Πολιτική των «Μαθηματικών για όλους» και μερικές παιδαγωγικές συνέπειες. *Πρακτικά 35ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ. 869-878. Αθήνα: Ε.Μ.Ε.

Ransom, P. (1993). Astrolabes, Cross Staffs and Dials: The ACD of Geometry through old Instruments. *Mathematics in School*, 22(4), 2-8.

Swetz, F. (1977). The "Piling up of Squares" in Ancient China. *The Mathematics Teacher*, 70(1), 72-79.

Taimina, D. & Henderson, D. (2005). How to Use History to Clarify Common Confusions in Geometry. In A. Shell-Gellasch & D. Jardine (Eds) *From Calculus to Computers: Using Recent History in the Teaching of Mathematics*. Washington DC: MAA, pp. 57-73.

Tzanakis, C. & Arcavi, A. with Correia de Sa, C., Isoda, M., Lit, C. K., Niss, M., de Carvalho, J. P., Rodriguez, M. and Siu M. K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds) *History in Mathematics Education*: *The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer, pp. 201-240.

Τζανάκης, Κ. (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ Ιστορίας των Μαθηματικών και Μαθηματικής Εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, σσ. 17-39. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.