Ταξίδι από τα τρίγωνα στις πολλαπλότητες

(Λαμία - online - 22/4/21)

Ανδρέας Αρβανιτογεώργος, Πανεπιστήμιο Πατρών

Σκοπός της ομιλίας αυτής είναι να παρουσιάσω μερικούς σημαντικούς σταθμούς στην εξέλιξη της γεωμετρίας. Τον τίτλο εμπνεύστηκα από το άρθρο του S. S. Chern: From triangles to manifolds, 1979 (Δες στο τέλος βιβλιογραφία).

Μαθηματικά: Η επιστήμη που μελετάει

την ποσότητα και τον χώρο

ποσότητα → Αριθμητική → Άλγεβρα

χώρο → Γεωμετρία → Φυσική

Ένας αυστηρός ορισμός της γεωμετρίας είναι μάλλον δύσκολο να δοθεί, δεδομένου ότι οι απόψεις περί αυτής άλλαζαν ανάλογα με την εποχή

Απαρχές της γεωμετρίας:

Αιγύπτιοι, Άραβες, Βαβυλώνιοι

Υπολόγιζαν εμβαδά και όγκους σχημάτων με σκοπό τη μέτρηση της γης και καθημερινές συναλλαγές

Πιθανώς, είχαν γνώση κάποιων θεωρημάτων αποτελεσμάτων (πχ Πυθαγόρειο θεώρημα)

Οι αρχαίοι Έλληνες ήταν αυτοί που έθεσαν τα ερωτήματα του "πώς" και "γιατί"

Το πρώτο υπόδειγμα τυπικής (γεωμετρικής) απόδειξης οφείλεται στον Θαλή.

Η θεμελίωση της γεωμετρίας ως παραγωγικής επιστήμης οφείλεται στον Ευκλείδη (~300 π.Χ.), ο οποίος παρουσίασε το πρώτο τυποποιημένο σύστημα εξακριβώσεως (αποτέλεσε το πρότυπο για ανάλογα τέτοια συστήματα).

Η θεμελίωση ολόκληρου του σώματος της Ευκλείδεια γεωμετρίας βασίζεται σε:

- Ορισμούς θεμελιωδών εννοιών
- Αξιώματα (αυταπόδεικτες προτάσεις)
- Λογικούς χειρισμούς (αποδείξεις)
- Θεωρήματα.

Αυτά περιλαμβάνονται στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη.

13 βιβλία:
- 6 βιβλία σχετικά με επιπεδομετρία
- 2 " " θεωρία αριθμών
- 2 " " ασύμμετρους λόγους
- 3 " " στερεομετρία

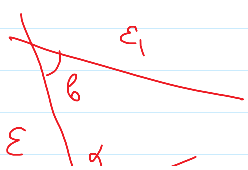
· Όλη η γεωμετρία βασίζεται σε 5 αιτήματα

1° Μεταξύ δύο σημείων διέρχεται μόνο μία ευθεία

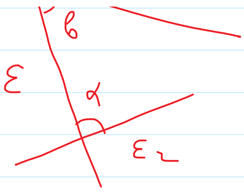
2° Ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί και προς τα δύο άκρα του, επ' άπειρο

3° Με δοθέν κέντρο και δοθείσα ακτίνα γράφεται κύκλος

4° Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους

5° 

Αν η ευθεία ε τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 και



ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και

$α+β < 2$ ορθές, τότε οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται

Για τους αρχαίους Έλληνες η γεωμετρία ήταν

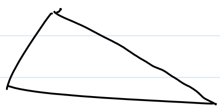
- εργαλείο περιγραφής του χώρου
- σύστημα με διανοητική πειθαρχία και συμπερασματική δομή

Επιπλέον, η Ευκλείδεια γεωμετρία ήταν μια φυσική θεωρία (θεωρία περιγραφής του χώρου που ζούμε)

Γεωμετρία ⟷ Φυσική

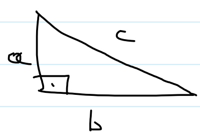
Διαρκής αλληλοεπίδραση μέχρι τις μέρες μας.

Το πιο απλό γεωμετρικό σχήμα είναι το τρίγωνο



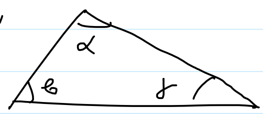
Βασικά αποτελέσματα σχετικά με το τρίγωνο.

1) Πυθαγόρειο θεώρημα



$c^2=a^2+b^2$

2) Άθροισμα γωνιών



$α+β+γ=2$ ορθές γωνίες

Το 2) προκύπτει από το 5° αίτημα

Ο Ευκλείδης αναβάλλει τη χρήση του 5ου αιτήματος όσο είναι δυνατόν αργότερα. Το περιεχόμενο της διατύπωσής τους ενέπνευσε ανησυχία σχετικά με το κατά πόσον είναι δυνατόν να προκύπτει από τα τέσσερα πρώτα αξιώματα

Πολλές προσπάθειες για την απόδειξη του $5^{ου}$ αιτήματος απέτυχαν.

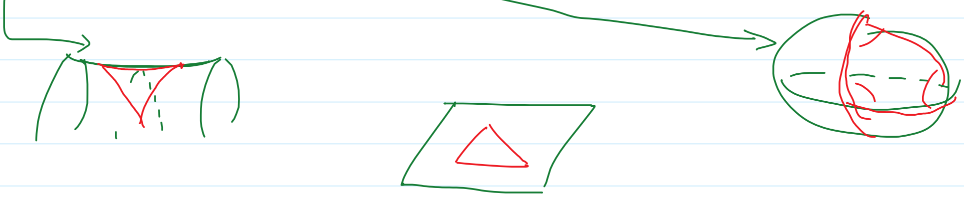
Αποτέλεσμα των προσπαθειών αυτών ήταν η δημιουργία μη Ευκλείδειων γεωμετριών,

δηλαδή γεωμετριών συνεπών με τον εαυτό τους χωρίς τη χρήση του $5^{ου}$ αιτήματος

Εργασίες των Bolyai και Lobatchevsky (~1825)

οδήγησαν σε νέες γεωμετρίες, όπως

Υπερβολική γεωμετρία (όπου $\alpha+\beta+\gamma < 2$ ορθές)
Σφαιρική γεωμετρία (όπου $\alpha+\beta+\gamma > 2$ ορθές)

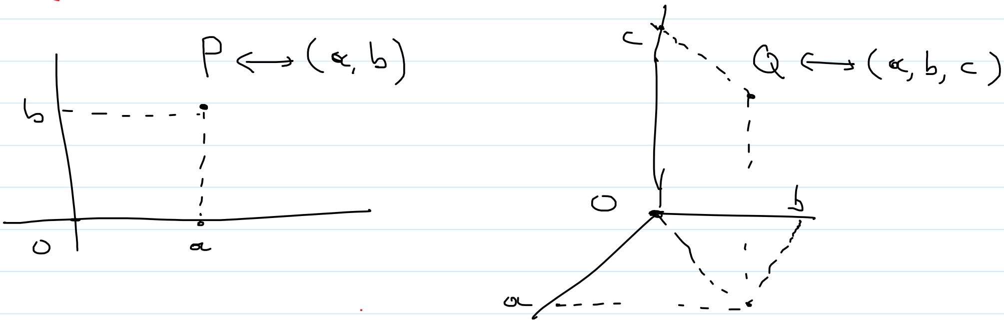


Μετά από μια σημαντική διάβαση στην Αλεξανδρινή περίοδο και τους Ιταλούς αλγεβριστές (πχ Cardano), οι οποίοι μελέτησαν εξισώσεις $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού, φτάνουμε στον....

Καρτέσιο ~ 1600

Εισαγωγή των συντεταγμένων (Αναλυτική Γεωμετρία)

(Σημαντικό επιστημονικό άλμα)



Αντιστοιχία σημείων του επιπέδου/χώρου

με τομή/σειρές αριθμών

Πλεονεκτήματα της αλγεβρικής μεθόδου

1) Εισαγωγή της άλγεβρας στη μελέτη της γεωμετρίας

2) Διευκολύνεται η μελέτη καμπυλών του επιπέδου, της μορφής $f(x,y)=0$

(π.χ. )

3) Δυνατότητα γενίκευσης σε περισσότερες διαστάσεις $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

(Η γενίκευση είναι χρήσιμη, π.χ. στη μηχανική.

Από τον Νεύτωνα διαπιστώθηκε ότι η κίνηση ενός σωματιδίου καθορίζεται από ένα διάνυσμα θέσης (3-διάστατο) και ένα διάνυσμα ταχύτητας (3-διάστατο), Άρα χρειαζόμαστε "χώρο" 6 διαστάσεων.

Από τον Καρτέσιο, η γεωμετρία και η άλγεβρα βαδίζουν πλέον μαζί

Μειονεκτήματα της αλγεβρικής μεθόδου

1) Δεν είναι αποτελεσματική για τη μελέτη καμπυλών και επιφανειών που ορίζονται από υπερβατικές εξισώσεις (πχ $xy + e^{x}y = 1$)

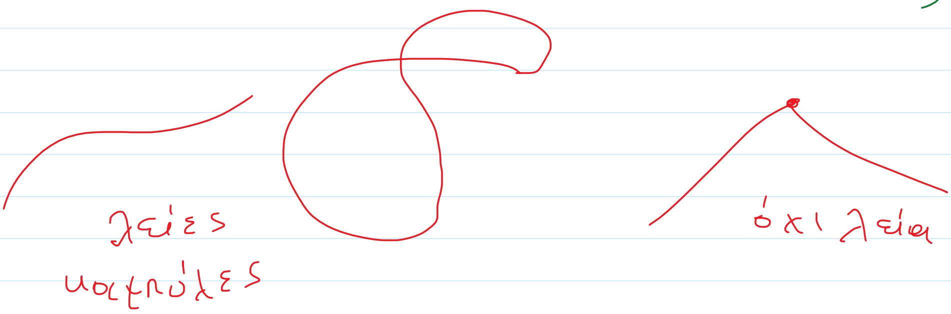
2) Απλές έννοιες όπως η εφαπτόμενη καμπύλης και η καμπυλότητα καμπύλης δεν εκφράζονται αλγεβρικά

Εισαγωγή του απειροστικού λογισμού στη μελέτη καμπυλών

Απειρ λογισμός: Leibnitz, Newton

Χρησιμοποιήθηκε από Fermat ~ 1835
και Gauss ~ 1820

Με την ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού άρχισε η ανάπτυξη της <u>κλασικής διαφορικής γεωμετρίας</u> στη χρήση της έννοιας της παραγώγου για τη μελέτη λείων (διαφορίσιμων) καμπυλών του επιπέδου (και του χώρου)

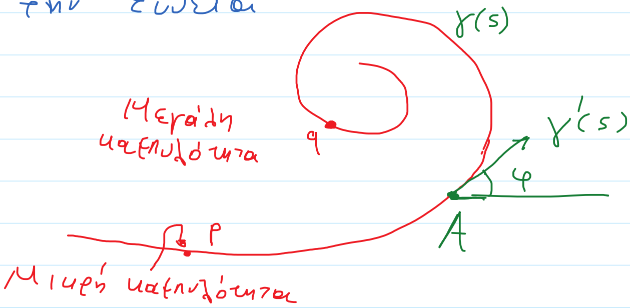


Καμπυλότητα επίπεδης καμπύλης

Μέτρο του πόσο διαφέρει μια καμπύλη από την ευθεία

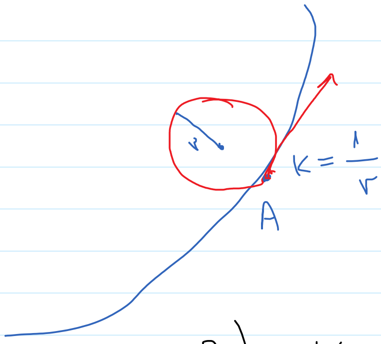
($\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$)

Διαισθητικά:
(κύρτωση σε δύο σημεία p, q)



Καμπυλότητα στο σημείο A: $K(s) = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$

= ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας (ως προς s) του εφαπτόμενου διανύσματος $\gamma'(s)$ της $\gamma(s)$ με τον οριζόντιο άξονα



Κύκλος καμπυλότητας στο A
(ακτίνας r)
έχει τις ιδιότητες:

1) Ίδια καμπυλότητα με την καμπύλη στο σημείο A

2) Κοινό εφαπτόμενο διάνυσμα

3) Βρίσκεται στο "εσωτερικό" της καμπύλης

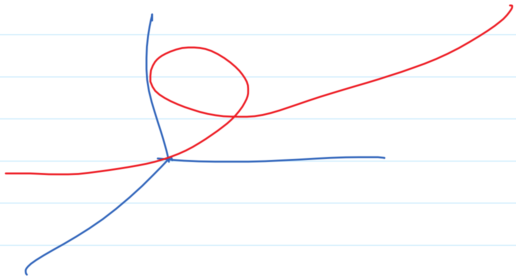
Τότε προκύπτει ότι η καμπυλότητα στο A ισούται με

$$k = \frac{1}{r}$$

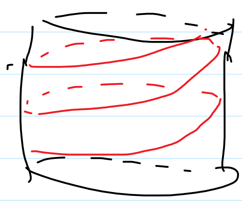
r = ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης στο σημείο A

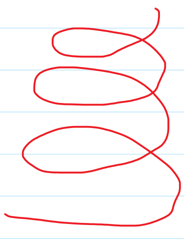
Καμπύλες στον 3-διάστατο χώρο

Μια τέτοια καμπύλη καθορίζεται από την καμπυλότητα και τη στρέψη, ένα μέγεθος που μετρά το πόσο απέχει μια καμπύλη από το να είναι επίπεδη



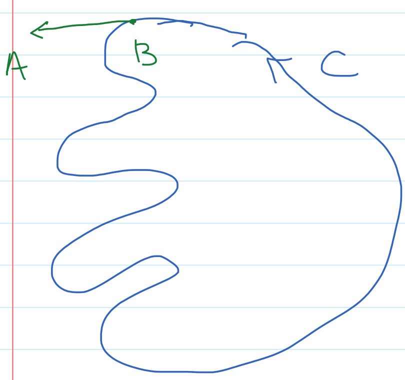
Η πιο "ωραία" καμπύλη στο χώρο είναι η κυκλική έλικα

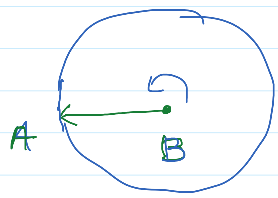




Η καμπύλη αυτή παρουσιάζεται τακτικά στη φύση (π.χ. η διπλή έλικα του μοντέλου των Crick-Watson για το DNA στη μοριακή βιολογία)

Μια ενδιαφέρουσα έννοια που σχετίζεται με μια επίπεδη καμπύλη C είναι ο <u>δείκτης στροφής Δ_C</u>





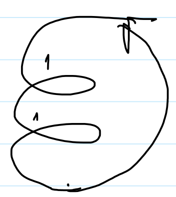
Δ_C = πόσες φορές περιστρέφεται γύρω από σημείο B το διάνυσμα AB, το οποίο είναι παράλληλο με τις εφαπτόμενες στην καμπύλη

<u>Θεώρημα</u> Αν η καμπύλη C είναι απλή (δηλ. δεν έχει αυτοτομές), τότε $\Delta_C = \pm 1$

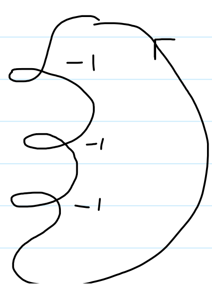
<u>Θεώρημα</u> Αν η καμπύλη C είναι προσανατολισμένη που έχει αυτοτομές, τότε

$\Delta_C = 1 +$ αλγεβρικό άθροισμα των αυτοτομών

<u>π.χ.</u>

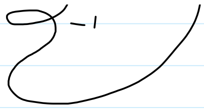


$\Delta_C = 1+(1+1) = 3$



$\Delta_C = 1+(-1) = 0$

$\Delta_c = 1+(1+1) = 3$

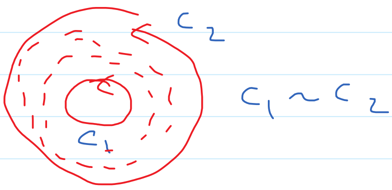


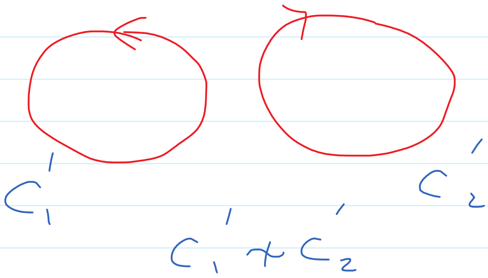
$\Delta_c = 1+(-1-1-1) = -2$

$\Delta_c = 1+(-1) = 0$

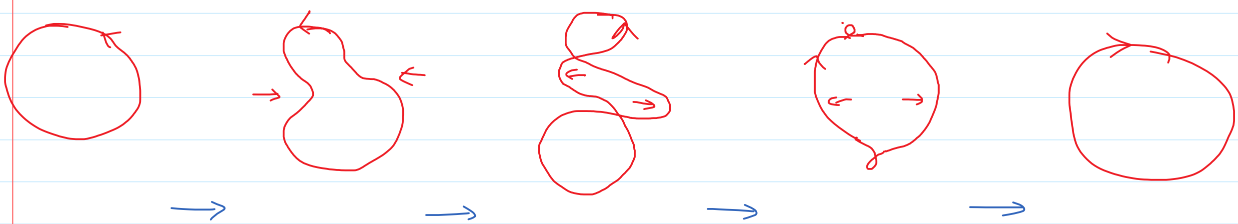
Μια πιό σύγχρονη έννοια είναι η έννοια της <u>ομοτοπίας</u>

<u>Ορισμός</u> Δύο κλειστές λείες καμπύλες του επιπέδου ονομάζονται <u>κανονικά ομοτοπικές</u> εάν μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη μία στην άλλη μέσω μιας οικογένειας κλειστών λείων καμπυλών





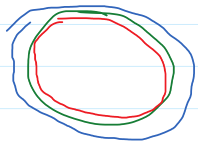
Παρακάτω φαίνεται μία ανεπιτυχής προσπάθεια μετασχηματισμού της καμπύλης C_1' στην C_2':



Σε κάθε στάδιο της ομοτοπίας η καμπύλη μπορεί να έχει "διπλά σημεία", αλλά όχι σημεία όπου η εφαπτομένη δεν ορίζεται.

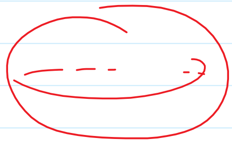
<u>Με άλλα λόγια</u> Αν βάψω το εσωτερικό ενός κύκλου με κόκκινο χρώμα και το εξωτερικό του με μπλε χρώμα, τότε δεν είναι δυνατόν να γυρίσω τα μέσα-έξω

Χωρίς να κόψω τον κύκλο



Αναπάντεχο αποτέλεσμα του Smale.

Αυτό είναι δυνατόν να γίνει για τη σφαίρα!



Τελικά

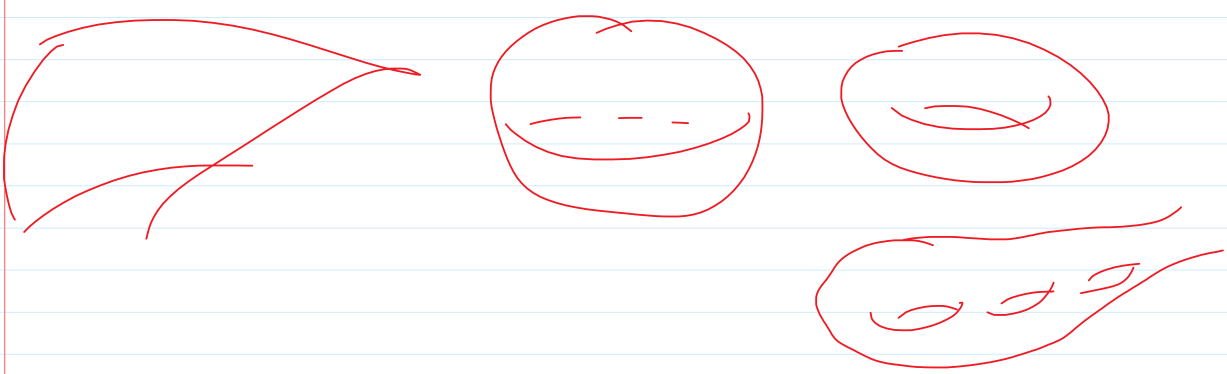
Θεώρημα (Graustein-Whitney)

Δύο καμπύλες (λείες - προσανατολισμένες) είναι κανονικά ομοτοπικές εάν και μόνο εάν έχουν τον ίδιο δείκτη στροφής

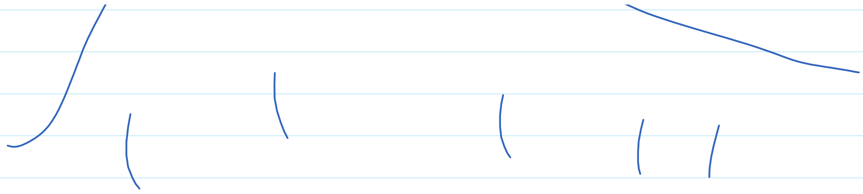
Θεωρία επιφανειών (Gauss ~ 1827)

Με τη θεωρία επιφανειών που ανέπτυξε ο Gauss, η διαφορική γεωμετρία, από κεφάλαιο του απειροστικού λογισμού, αναπτύσσεται πλέον σε ανεξάρτητο κλάδο

Μερικές κανονικές επιφάνειες



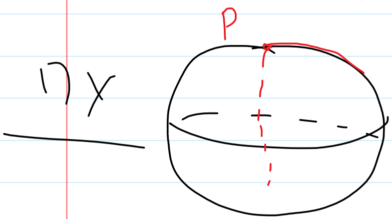
Καμπυλότητα επιφάνειας σε ένα σημείο p



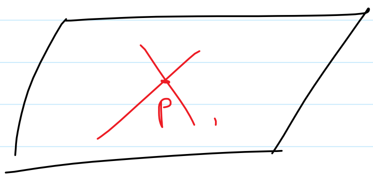
Βρισκόμενος σε ένα σημείο p σε ένα βουνό, μπορώ να επιλέξω πολλές καμπύλες προκειμένου να κατέβω, οι οποίες έχουν διάφορες καμπυλότητες. Επιλέγω αυτή με την ελάχιστη καμπυλότητα k_{min} και αυτή με την μέγιστη καμπυλότητα k_{max}.
Τότε

Η Καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας στο σημείο p είναι $K(p) = k_{min} \cdot k_{max}$

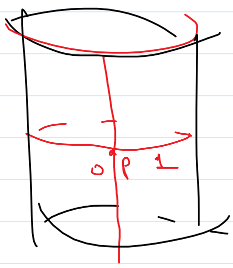
Π.χ



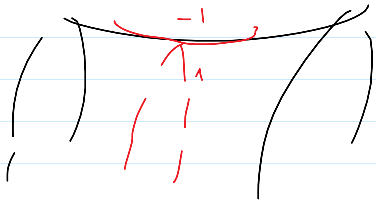
$K(p) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$



$K(p) = 0 \cdot 0 = 0$

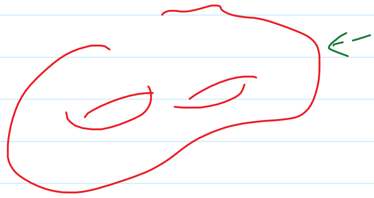


$K(p) = 0 \cdot 1 = 0$



$K(p) = -1 \cdot 1 = -1 < 0$

Αν και ο ορισμός της καμπυλότητας Gauss απαιτεί να "βλέπουμε" την επιφάνεια από μακριά,



← - Παρατηρητής

Ο Gauss απέδειξε το εξής:

Εκπληκτικό Θεώρημα (Theorema Egregium)

Η Καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας δεν εξαρτάται από εξωτερικό παρατηρητή, αλλά μπορεί να μετρηθεί από κάποιον που κινείται πάνω στην επιφάνεια

(Λίγο πιο τεχνικά: Αν $f: M_1 \to M_2$ είναι μια λεία απεικόνιση μεταξύ επιφανειών που διατηρεί τα μήκη, τότε διατηρεί και την καμπυλότητα Gauss, δηλ

$$K(f(p)) = K(p)$$)

Πόρισμα ("Εφιάλτης του χαρτογράφου")

Δεν είναι δυνατόν να σχεδιαστεί ένας επίπεδος χάρτης της γης, έτσι ώστε να διατηρούνται οι αποστάσεις.

(Αιτία: Η σφαίρα δεν είναι ισομετρική με τμήμα του επιπέδου)

(Οι χάρτες που γνωρίζουμε χρησιμοποιούν την Προβολή του Mercator)

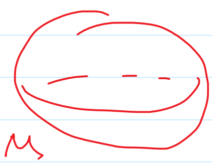
Η πρώτη διασύνδεση γεωμετρίας και τοπολογίας

— Το θεώρημα των Gauss-Bonnet

[Τοπολογία: Ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με ιδιότητες σχημάτων - χώρων, οι οποίες διατηρούνται αναλλοίωτες κάτω από συνεχείς μετασχηματισμούς]

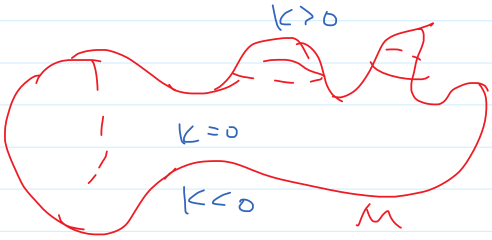
Γεωμετρία : $\leftrightarrow$ Μήκος

Ερώτημα Υπάρχει σχέση μεταξύ καμπυλότητας και του ολικού σχήματος μιας επιφάνειας;

πχ Η σφαίρα  με Καμπυλότητα Gauss $\boxed{K = 1 \text{ παντού}}$

M ... (K = 1 παντού)

Είναι $\boxed{\text{ομοιομορφική}}$ με την επιφάνεια



με πολύ μεταβαλλόμενη καμπυλότητα Gauss

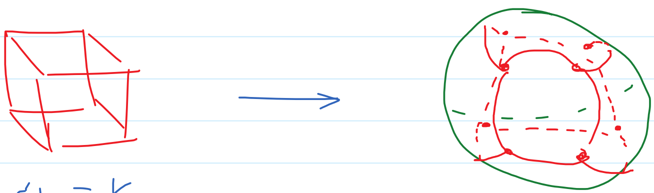
αλλά, το ολοκλήρωμα $\int_M K$ εξαρτάται από την τοπολογία της M. Συγκεκριμένα

$$\int_M K = 2\pi\chi(M) \qquad (\text{Θεώρημα Gauss-Bonnet})$$

$\chi(M)$ = χαρακτηριστική του Euler είναι μια τοπολογική αναλλοίωτη της M και ορίζεται μέσω μιας τριγωνοποίησης της M

$\chi(M) = K - A + E$

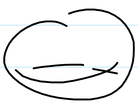
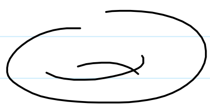
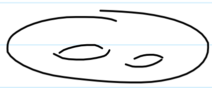
π.χ.



Κορυφές = K
Ακμές = A
Έδρες = E

$K = 8$
$E = 6$ $A = 12$, άρα $\chi(S^2) = 2$

Επιπλέον, $\chi(M) = 2(1-g)$, όπου g = γένος της M, δηλ. ο αριθμός των "οπών" της M

(π.χ.  $g=0$,  $g=1$  $g=2$)

Πολλαπλότητες (Riemann ~1850, Hilbert)

Ο Riemann γενίκευσε τη θεωρία επιφανειών του Gauss σε χώρους μεγαλύτερης διάστασης

Ιδέα: • Για τη μελέτη της γης χρησιμοποιούμε χάρτες
• Δεν αρκεί ένας χάρτης για την κάλυψη της γης

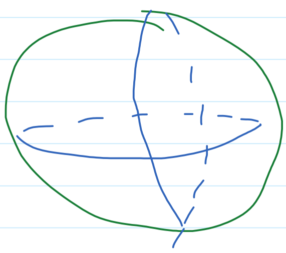
Μια πολλαπλότητα M είναι ένα σύνολο (τοπολ. χώρος) το οποίο τοπικά είναι ίδιο με ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$

n = διάσταση της M

"Τοπικά": ύπαρξη συντεταγμένων
"ίδιο": υπάρχει ομοιομορφισμός (δηλ 1-1, επί συνεχής απεικόνιση με συνεχή αντίστροφο)

$\dim M = 2$

Μια κάλυψη της σφαίρας με έναν άτλαντα που έχει 6 χάρτες.



ημισφαίρια πάνω-κάτω = 2
δεξιά-αριστερά = 2
μπρος-πίσω = 2 +
6

Για να μελετηθούν αποστάσεις, καμπυλότητα, ελάχιστα μήκη σε μια πολλαπλότητα M, χρειαζόμαστε μια μετρική, δηλ ένα εσωτερικό γινόμενο σε κάθε εφαπτόμενο χώρο της πολλαπλότητας

Αν $g = \langle , \rangle$ = μετρική, τότε το ζεύγος (M, g) ονομάζεται πολλαπλότητα Riemann.

Προκειμένου να ορισεί έννοια καμπυλότητας σε μια πολλαπλότητα M, ο Riemann χρησιμοποίησε τον τανυστικό λογισμό που είχε αναπτυχθεί από τους Ricci και Christoffel

Ορίζονται τριών ειδών καμπυλότητες.

- Καμπυλότητα τομής ($\longleftrightarrow$ Τανυστής καμπυλότητας Riemann)
- Καμπυλότητα Ricci Ric
- Βαθμωτή καμπυλότητα

Η εργασία του Riemann χρησιμοποιήθηκε από τον Einstein ως βάση για τη γενική θεωρία σχετικότητας

Η γεωμετρία του χωροχρόνου σχετίζεται με την κατανομή της ύλης, μέσω της εξίσωσης Einstein

$$Ric(g) - cg = T$$

T = τανυστής ενέργειας – ορμής
Ric = καμπυλότητα της μετρικής g
c = κοσμολογική σταθερά

Γεωμετρία κατά Klein (~1872)

(ομάδες μετασχηματισμών)

Η γεωμετρία έχει ως αντικείμενο μελέτης τις ιδιότητες ενός χώρου, οι οποίες παραμένουν

αναλλοίωτες κάτω από μια ομάδα μετασχηματισμών
(απεικονίσεων)

Π.χ. Η Ευκλείδεια γεωμετρία του επιπέδου $\mathbb{R}^2$
μελετά εκείνες τις ιδιότητες των σχημάτων
του επιπέδου, οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες
μέσω ισομετριών του $\mathbb{R}^2$
↳ (απεικονίσεων που διατηρούν τα μήκη)

Η έννοια της ομάδας είχε εμφανιστεί από τους
Galois, Cauchy, Lagrange.
Το πρόγραμμα του Lie ("Πρόγραμμα του Erlangen")
είναι κάτι ανάλογο με το Πρόγραμμα του Galois,
σύμφωνα με το οποίο, υπάρχει συσχέτιση μεταξύ
αλγεβρικών εξισώσεων και κάποιες ομάδες συμμετριών
των εξισώσεων αυτών, γνωστές ως ομάδες Galois

Έτσι ξεκίνησε στη συνεισφορά του Lie (~1880)
στη γεωμετρία.
Ο Lie ήθελε να εφαρμόσει κάτι ανάλογο με το
πρόγραμμα του Galois, για τις διαφορικές εξισώσεις.
Μελετούσε διαφορικές εξισώσεις "τύπου Lie", ένα παράδειγμα
από τις οποίες είναι η εξίσωση Ricatti
Ο Lie μελετούσε τις συνεχείς ομάδες,
οι οποίες τώρα ονομάζονται ομάδες Lie

Μια ομάδα Lie είναι μια πολλαπλότητα και ομάδα
μαζί

Συνήθως, μια ομάδα Lie είναι μια ομάδα μετασχηματισμών ενός χώρου, που τις περισσότερες φορές έχει τη μορφή πινάκων.

Οι πιό γνωστές από αυτές είναι

$O(n)$ ορθογώνια ομάδα

$U(n)$ μοναδιαία ομάδα

$Sp(n)$ συμπλεκτική ομάδα

Η έννοια της ομάδας Lie βρίσκεται πλέον στον πυρήνα πολλών μαθηματικών δραστηριοτήτων. Χρησιμοποιούνται ευρέως στη διαφορική γεωμετρία, αρμονική ανάλυση, διαφορικές εξισώσεις, αλγεβρική τοπολογία, κλπ. Οι ομάδες Lie χρησιμοποιούνται επιπλέον στη μαθηματική φυσική, στη θεμελίωση των θεωριών βαθμίδας Yang–Mills.

Η μελέτη μιας ομάδας Lie G (γενικά ένα δύσκολο μη γραμμικό αντικείμενο) διευκολύνεται μέσω μιας απειροστικής πράξης, το όριο της οποίας ονομάζεται άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Η άλγεβρα Lie της G είναι ένας διανυσματικός χώρος (σαφώς ευκολότερο μαθηματικό αντικείμενο) εφοδιασμένος με μια πράξη το γινόμενο Lie $[\,,\,]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$

(π.χ. το εξωτερικό γινόμενο $\times$ διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^3$ είναι ένα γινόμενο Lie στον $\mathbb{R}^3$)

ομάδα Lie G ⟷ Άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$

Δύσκολο αντικείμενο — Εύκολο αντικείμενο (διαν. χώρος)

Η σύγχρονη διαφορική γεωμετρία αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Cartan, Whitney ~1920

Γεωμετρία κατά Cartan := Συνοχή σε μια κύρια νηματική δέσμη

$$\pi : P \longrightarrow M$$

(π.χ. Η γεωμετρία Riemann είναι μια συνοχή (Levi-Civita) στην εφαπτόμενη δέσμη $\pi: TM \longrightarrow M$)

Κλείνοντας, παραθέτουμε μια ενδεικτική αντιστοιχία μεταξύ σημαντικών σταθμών στην ανάπτυξη της γεωμετρίας και φυσικών θεωριών

Ευκλείδεια γεωμετρία ⟷ Μέτρηση γης

Απειροστικός λογισμός - καμπύλες ⟷ Νεύτωνας, Leibnitz, Νόμοι πλανητών Kepler

Θεωρία επιφανειών του Gauss ⟷ Πολλά φυσικά ερείσματα - Εφαρμογές

Πολλαπλότητες Riemann ⟷ Γενική Θεωρία σχετικότητας Einstein

Ομάδες Lie ⟷ Συμμετρία (Διαφ. εξισώσεις, φυσική)

Θεωρία συνοχών του Cartan ⟷ Θεωρία βαθμίδας

Τεχνικές της διαφορικής γεωμετρίας για την απόδειξη ευστάθειας ανωμαλιών των μαύρων τρυπών ⟷ Πεδία Yang-Mills, Penrose

Απαρίθμηση ρητών καμπυλών στις πολλαπλότητες Calabi-Yau ⟷ Κατοπτρική συμμετρία / Θεωρία Χορδών / Κβαντική Θεωρία πεδίου

Αναφορές

S S Chern: From triangles to manifolds, Amer Math Monthly, 86 (1979) 339-349

Ελληνική μετάφραση: Δ Λάππας - Θ Πετρέσκου, Μαθηματική Επιθεώρηση, ΕΜΕ 16 (1979)

S S Chern: What is Geometry?, Amer Math Monthly, 97 (1990) 679-689

R V Gamkrelidze (Ed): Geometry I. Basic ideas and concepts of Differential Geometry, Springer 1991

M Mlodinow: Euclid's Window: The story of Geometry from Parallel Lines to Hyperspace, Simon and Schuster, NY 2001

Ελληνική Μετάφραση: Το Παράθυρο του Ευκλείδη, Εκδ Κάτοπτρο 2007

M Atiyah: Mathematics in the 20th Century,

- Amer Math Monthly, 108 (2001) 654-666
- Bull London Math Soc 34 (2002) 1-15
- NTM Intern J Hist Ethics Nat. Sci. Tech. Med. 10 (2002) 25-39