

# Μια Περιήγηση στο Χάος και στα Φράκταλς

ΦΙΛΑΡΕΤΗ ΖΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΥ -  
ΚΑΡΑΤΖΟΓΛΟΥ

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, Απρίλιος 2021

*Το Χάος πρωτογένηκε,  
Κι η Γη μετά η πλατυστήθα.  
Κι από το Χάος πάλι γεννήθηκε  
Το Έρεβος κι τρίσβαθη η Νύχτα.  
(ΗΣίοδου, Θεογονία)*



Plate 1: Stilben (used in some detergents) dendrites in polarized light, © Manfred Kage, Institut für wissenschaftliche Fotografie.

# Τα Μαθηματικά της Φύσης

Ο Henri Poincare έλεγε:

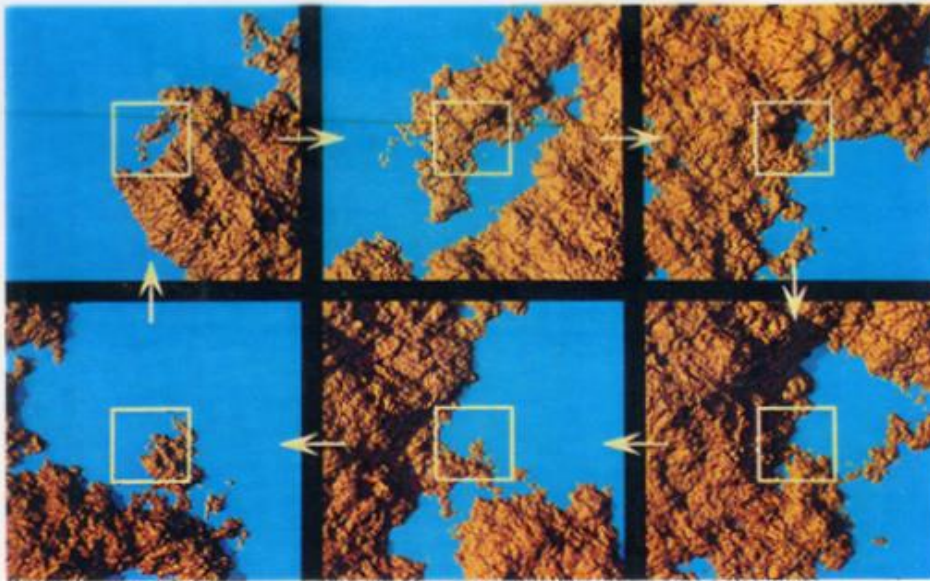
- ▶ «Ο επιστήμονας μελετάει την Φύση όχι γιατί είναι χρήσιμη, αλλά γιατί τον μαγεύει. Και τον μαγεύει γιατί είναι όμορφη. Αν η Φύση δεν ήταν όμορφη, δεν θα άξιζε να την γνωρίσουμε κι αν δεν άξιζε να γνωρίσουμε την Φύση, δεν θα άξιζε ούτε η ζωή».



Plate 22: Natural ice formation on Mount Kilimanjaro, © John Reader.

Τα σύννεφα δεν είναι γυαίρες,  
ούτε τα βουνά κώνοι ...

B. Mandelbrot



Οι παραγίες  
δεν είναι  
απόλυτοι..

Plate 8: Fractal coast, repeating after 6 magnifications, © R.F. Voss.

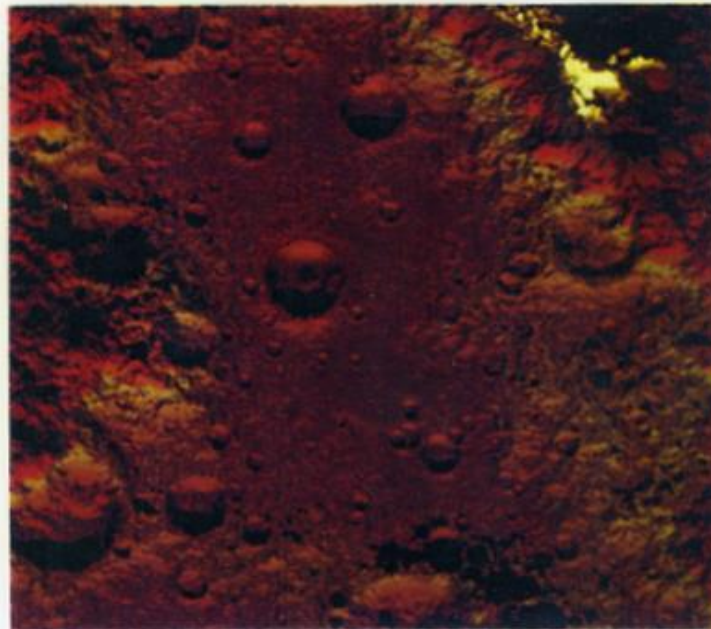


Plate 9: Fractal Moon Craters, © R.F. Voss.

# Φράκταλς στή Βιολογία



Ανθρώπινο  
νεφρό....

Plate 2: Cast of a child's kidney, venous and arterial system,  
© Manfred Kage, Institut für wissenschaftliche Fotografie.

Θα επιχειρήσουμε μια περιπλάνηση στον μυστηριώδη κόσμο των Μη Γραμμικών Φαινομένων και του Χάους, για να διαπιστώσουμε ότι η Γεωμετρία της Φύσης δεν είναι Ευκλείδεια και να δούμε πώς το πεταγμα μια πεταλούδας στο Πεκίνο μπορεί να προκαλέσει καταιγίδα στον Ατλαντικό.



Όταν λέμε δυναμικό σύστημα εννοούμε μια οποιαδήποτε διαδικασία, φυσική, χημική, βιολογική, οικονομική, κοινωνική, που εξελίσσεται στον χρόνο. Προτυποποιείται μέσα από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (ή εξισώσεις διαφορών), που συνδέουν, συνήθως με περίπλοκο τρόπο, την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της ως προς τον χρόνο, μαζί, ενδεχομένως, με κάποιες παραμέτρους.

Με τον όρο χαοτική συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος εννοούμε την εξαιρετικά ευαίσθητη εξάρτηση της χρονικής του εξέλιξης από τις αρχικές συνθήκες ή από κάποιες παραμέτρους. Όταν αυτή η εξάρτηση αποτυπωθεί σε σχήμα, δίνει κάποιες αλλόκοτες καμπύλες, τα λεγόμενα φράκταλς ή μορφοκλασματικές καμπύλες.

Επακόλουθο αυτής της συμπεριφοράς είναι η παντελής έλλειψη προβλεψιμότητας. Και πρέπει να τονιστεί ότι η χαοτική συμπεριφορά είναι ενδογενής, δηλαδή δεν προέρχεται από εξωτερικούς παράγοντες.

# Υπερίωνας, ένα κοσμικό σφουγγάρι!

Ο Υπερίωνας, ένας από τους πολλούς δορυφόρους του Κρόνου, αντιπροσωπεύει ένα από τα πρώτα δείγματα χαοτικής κίνησης μεγάλης κλίμακας που παρατηρήθηκε στο Σύμπαν. Ας σημειώσουμε εδώ πως, εξαιτίας αυτής της χαοτικής κίνησης, ο Ήλιος δεν ανατέλει ποτέ από την ίδια διεύθυνση και η διάρκεια της ημέρας σ' αυτό το κοσμικό σφουγγάρι ποικίλει.

# Ο Υπερίωνας

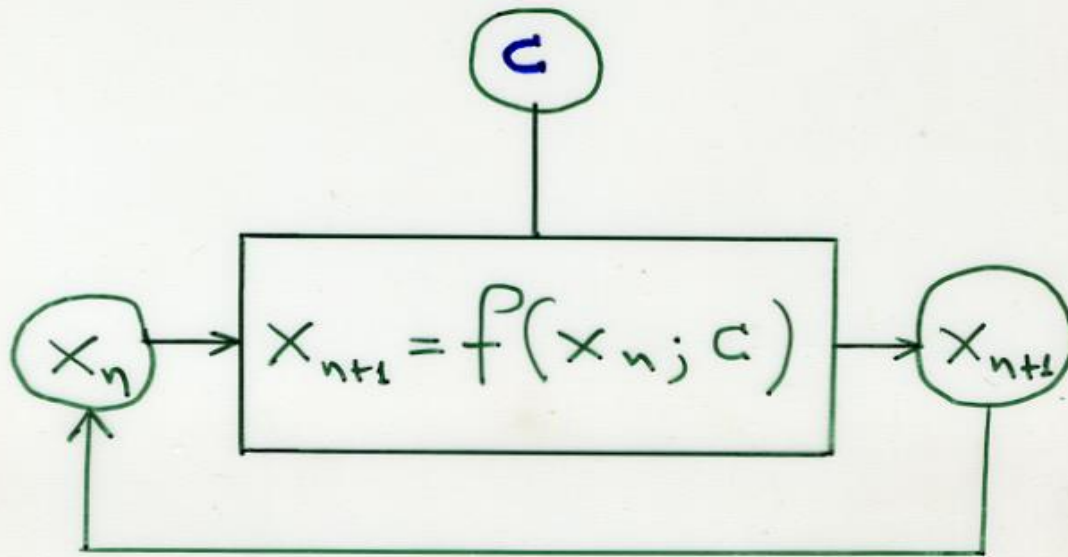
(σε φυσικά χρώματα, από το Cassini-Huygens)



Πολλά φαινόμενα προτυποποιούνται μέσα από μαθηματικά μοντέλα που περιλαμβάνουν βρόχους ανάδρασης της μορφής  $x_{n+1}=f(x_n;c)$ , όπου το  $c$  είναι μια σταθερή. Ξεκινώντας με ένα  $x_0$  δημιουργούμε μια ακολουθία  $x_1, x_2, x_3, \dots$  της οποίας η συμπεριφορά μετά από πολλές επαναλήψεις είναι το αντικείμενο της μελέτης μας. Θα φτάσει σε μια οριακή τιμή και θα σταματήσει εκεί; Θα φτάσει σε έναν κύκλο από τιμές που θα επαναλαμβάνονται πάλι και πάλι ή θα είναι απρόβλεπτη;

Επίσης αντικείμενο μελέτης αποτελεί και η εξάρτηση της ακολουθίας από την σταθερή  $c$ . Δηλαδή, ξεκινώντας από την ίδια αρχική τιμή  $x_0$ , πώς επηρεάζεται η ακολουθία από τις διάφορες αλλαγές στις τιμές της σταθερής  $c$ ; Βέβαια, ο νόμος  $f$  που συνδέει το  $x_n$  με το  $x_{n+1}$  θα πρέπει να είναι μη γραμμικός, δηλαδή κάτι πιο περίπλοκο από μια απλή αναλογία της μορφής  $x_{n+1} = k \cdot x_n + c$ . Ακολουθούν απλά παραδείγματα.

# Βρόχος Ανάδρασης



$x_0$  τιμή αρχική

$x_0 \mapsto x_1$

$x_1 \mapsto x_2$

$x_2 \mapsto x_3$

.....

Γραμμικός Νόμος:  $x_{n+1} = k x_n + \alpha$

Αυτή η φράση έχει  $\boxed{x}$  γράμματα

$$x_0 = 2$$

Αυτή η φράση έχει  $\boxed{\text{δύο}}$  γράμματα

$$x_1 = 25$$

Αυτή η φράση έχει  $\boxed{\text{εικοσιπέντε}}$  γράμματα

$$x_2 = 33$$

Αυτή η φράση έχει  $\boxed{\text{εξηντατρία}}$  γράμματα

$$x_3 = 33$$

**Σύμψηση**

---

Αυτή η πρόταση έχει  $\boxed{x}$  γράμματα

$$x_0 = 2$$



Αυτή η πρόταση έχει δύο γράμματα

$$x_1 = 27$$

Αυτή η πρόταση έχει επιμοβιεντά γράμματα

$$x_2 = 34$$

Αυτή η πρόταση έχει εριαντατέβιρα γράμματα

$$x_3 = 38$$

Αυτή η πρόταση έχει εριανταουκώ γράμματα

$$x_4 = 35$$

Αυτή η πρόταση έχει εριανταμίντε γράμματα

$$x_5 = 36$$

Αυτή η πρόταση έχει εριανταίφι γράμματα

$$x_6 = 34$$



$$x_0 = 0.54321$$

$$\frac{1}{0.54321} = 1.840908673 = x_1$$

$$\frac{1}{1.840908673} = 0.54321 = x_2 = x_0$$

---

$$2x^2 - 1 \rightarrow \text{ΧΑΟΣ}$$

Ενώ το  $x^2 - 1$  οδηγεί σε εναλλαγή των 0 και του -1.

$$kx^2 - 1 \rightarrow \text{ΤΑΞΗ και ΧΑΟΣ}$$

αλλαγή λοδισωχέμοντα

---

# *Το σύνολο του Mandelbrot*

Ο Benoit Mandelbrot είχε την έμπνευση να μελετήσει ακολουθίες μιγαδικών αριθμών, αντί πραγματικών. Η ακολουθία που τον απασχόλησε παράγεται από τον τύπο:

$x_{n+1} = x_n^2 + c$ , όπου  $c$  σταθερός μιγαδικός αριθμός.

Η συμπεριφορά αυτής της ακολουθίας εξαρτάται από δύο παράγοντες:

την αρχική τιμή  $x_0$  και την τιμή της σταθερής  $c$ .

Ο B. Mandelbrot έθεσε τιμή εκκίνησης  $x_0 = 0$  και μετέβαλε το  $c$ . Έτσι κατέληξε στο σύνολο που φέρει το όνομά του, το σύνολο του Mandelbrot. Το σύνολο αυτό αποτελείται από δύο περιοχές, μια λευκή και μελανή. Για τιμές της σταθερής  $c$  μέσα στην μελανή περιοχή η ακολουθία τείνει σε κάποιο πεπερασμένο αριθμό του μιγαδικού επιπέδου. Για τιμές του  $c$  μέσα στην λευκή περιοχή η ακολουθία αποκλίνει στο άπειρο. Το σύνορο ανάμεσα σε αυτές τις δύο περιοχές είναι πραγματικά εντυπωσιακό. Για κάποιες τιμές του  $c$  η ακολουθία  $x_n$  απρόβλεπτα και απροσδόκητα συγκλίνει ή αποκλίνει.

Τόσο πολύωρο !

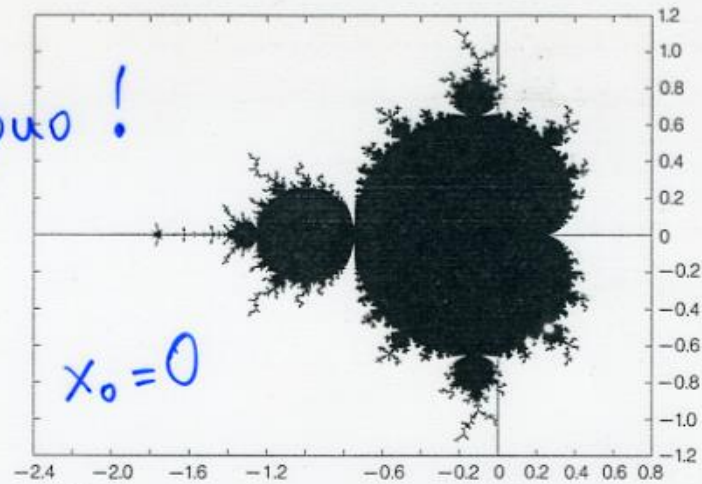


Fig.2. The Mandelbrot set for the process  $x_{n+1} = x_n^2 + c$ . The complex  $c$ -plane is shown with the window  $-2.4 < \text{Re } c < 0.8$ ,  $-1.2 < \text{Im } c < 1.2$ . The figure reflects an ordering among the various types of boundaries at different values of the parameter  $c$

$$\{x_n\}$$

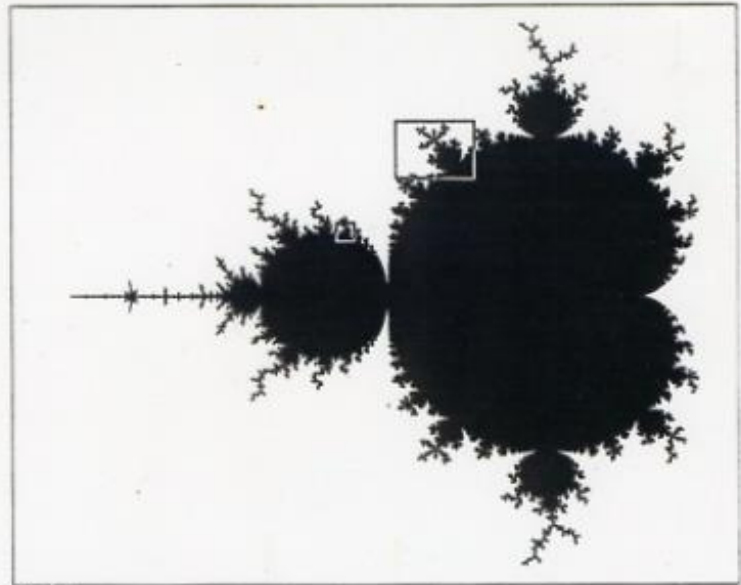
$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

$x_n$ : μιγαδικοί αριθμοί

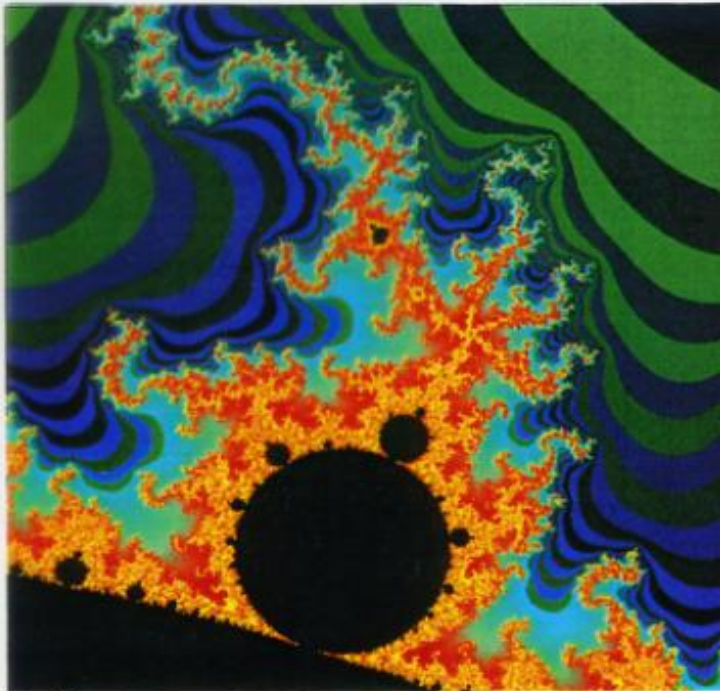
$c$ : μιγαδική σταθερή



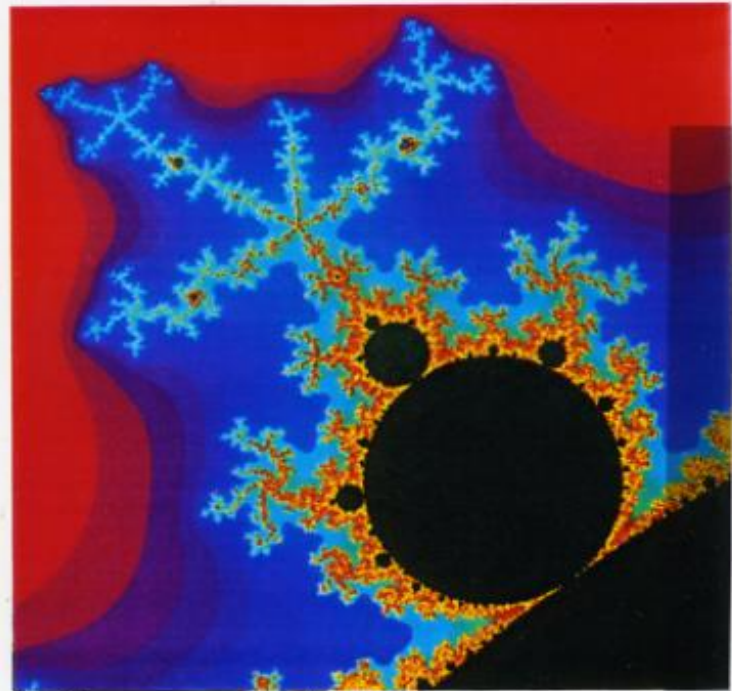
Δομή μέσα στη δομή  
σε κάθε μέγεθος



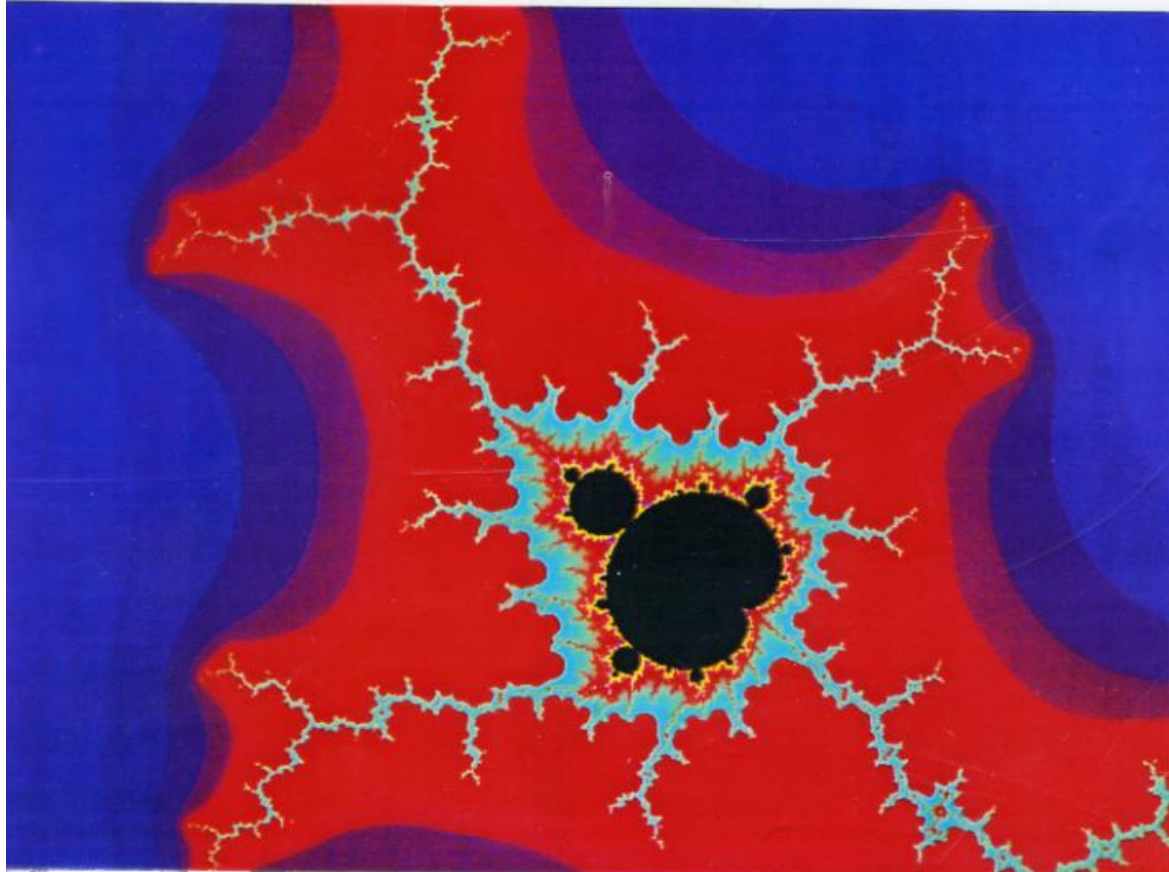
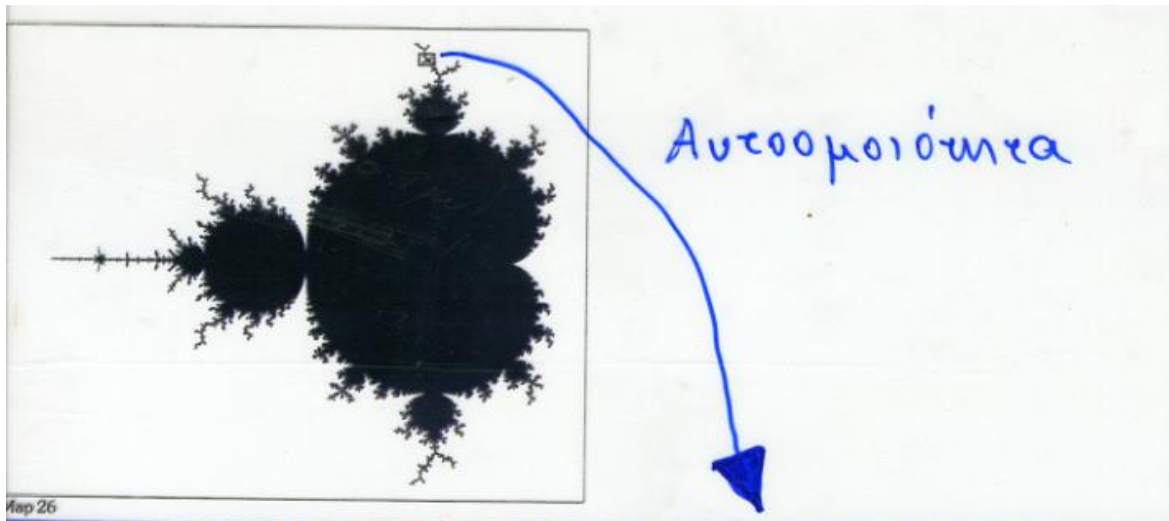
Map 28



Map 29



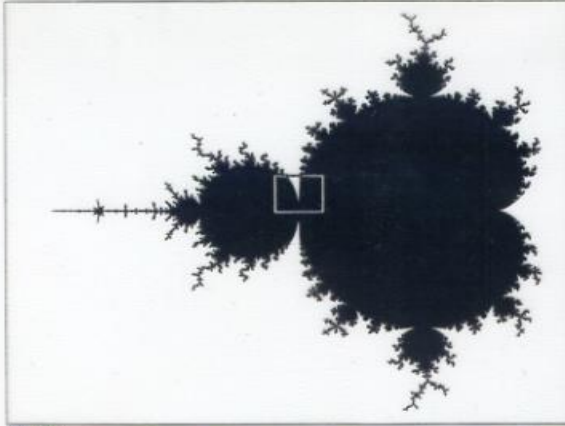
Map 30



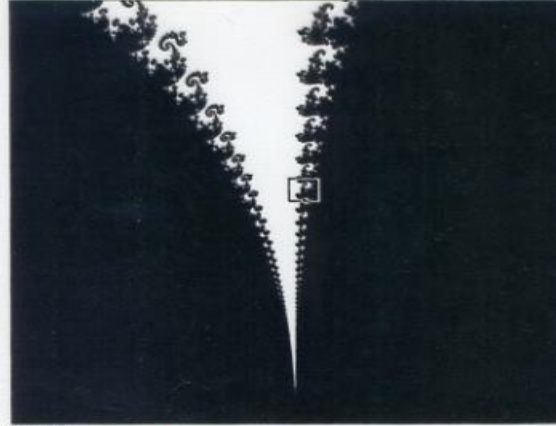


Η περιγραφή συνεχίζεται...

81



Map 34



Map 35



Map 36

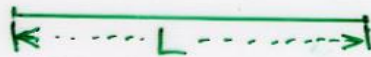
Έστω  $A$  ένα φραγμένο υποδύναμο του  $\mathbb{R}^m$  και  $N_\delta(A)$  ο ελάχιστος αριθμός  $\eta$ -διάστατων "σφαιρών" διαμέτρου  $\delta$  που καλύπτουν το  $A$ .

$$\text{Τότε: } D(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(A))}{\ln(\frac{1}{\delta})}$$

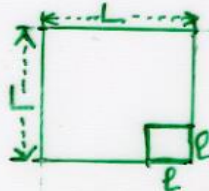
είναι η fractal διάσταση του  $A$ .

Διασθημαί:

επάγος:



χαρτί:



$$N = \left(\frac{L}{l}\right)^2$$

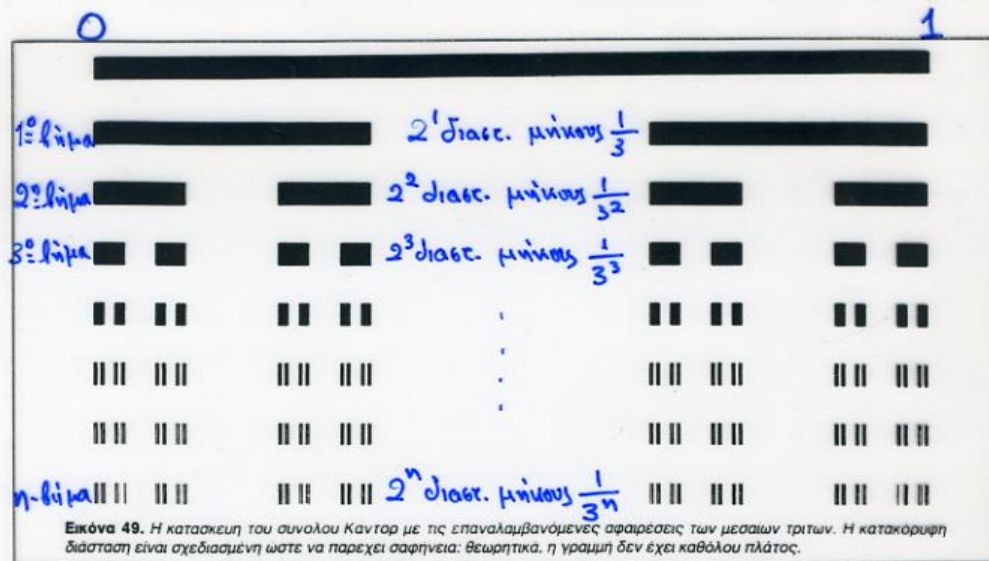
Τυρί:



$$N = \left(\frac{L}{l}\right)^d$$

$$N = \left(\frac{L}{l}\right)^3$$

$$d = \frac{\ln N}{\ln(\frac{1}{l})}, \quad L \equiv 1$$



Fractal διάσταση του εριαδίου συνόλου του Cantor:

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309$$

Έστω  $A$  ένα φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και  $N_\delta(A)$  ο ελάχιστος αριθμός  $\eta$ -διάκεων "σφαιρών" διαμέτρου  $\delta$  που μαζύωσουν το  $A$ .

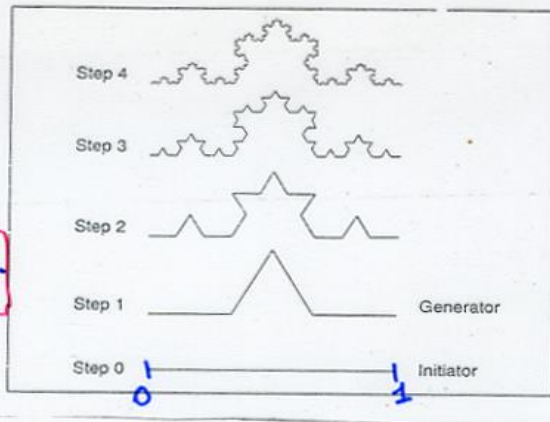
Τότε :

$$D(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{\ln \frac{1}{\delta}}$$

είναι η fractal διάσταση του  $A$

Fractal  
Διάσταση  
 $\ln 4 / \ln 3$

$D_0 \approx 1.2619...$



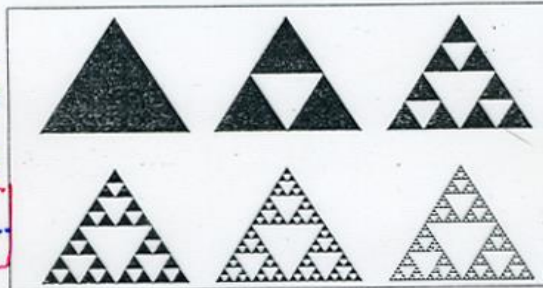
Καμωύμ  
των  
Koch

'Ανερο  
μύνος

Διάσταση: 1.2619.

Fractal  
Διάσταση:  
 $\ln 3 / \ln 2$

$D_0 \approx 1.5850...$

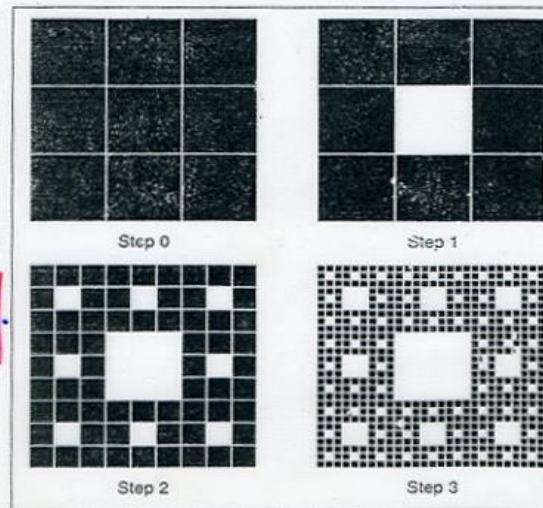


Τριώνιο  
των  
Sierpinski

Διάσταση: 1.5850.

Fractal  
Διάσταση:  
 $\ln 8 / \ln 3$

$D_0 \approx 1.8928...$



Χαλί των  
Sierpinski

Διάσταση: 1.8928.

Ας μελετήσουμε τώρα την εξέλιξη ενός βιολογικού πληθυσμού χρησιμοποιώντας το πρότυπο του **Verhulst**. Εδώ ο χρόνος θεωρείται διακριτός. Αν την χρονική στιγμή  $n$  ο πληθυσμός είναι  $P_n$ , ζητάμε έναν νόμο που θα συνδέει το  $P_n$ , με το  $P_{n+1}$ , με την προϋπόθεση σταθερό περιβάλλον.

Όπως η ταχύτητα είναι ένα από τα χαρακτηριστικά μεγέθη της κίνησης ενός σώματος, έτσι ο ρυθμός αύξησης είναι χαρακτηριστικό μέγεθος στην δυναμική των πληθυσμών.

## Πρόσωο Εξέλιξης Βιολογικού Πληθυσμού

- Σταθερό περιβάλλον
- Μέγιστο μέγεθος πληθυσμού που μπορεί να υποστηρίξει στο δοσμένο περιβάλλον :  $N$
- Διακριτός χρόνος

$P_n$  : μέγεθος πληθυσμού τη χρονική στιγμή  $n$

$$P_{n+1} = F(P_n) \quad \text{ο νόμος}$$

$$r_n = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} \quad \text{ρυθμός αύξησης}$$

Κανονικοποίηση :  $p_n = \frac{P_n}{N}$  ,  $0 \leq p_n \leq 1$

Νόμος του Verhulst:

$$P_{n+1} = P_n + \underbrace{r_n(1-p_n)}_{r_n} P_n$$

Νόμος του Verhulst:

$$p_{n+1} = p_n + r(1-p_n)p_n \equiv F(p_n)$$

Τιμή εκκίνησης :  $p_0$

Δυο τιμές ισορροπίας :  $p_0 = 0$  ,  $p_0 = 1$

-  $p_0 = 0$  : ασταθές σημείο ισορροπίας

-  $p_0 = 1$  : θεωρώ μικρή απόσταση  $d_n = p_n - 1$

Ο νόμος τότε δίνει:

$$d_{n+1} + 1 = d_n + 1 + r(-d_n)(d_n + 1)$$

Γραμμικοποιώντας:

$$d_{n+1} \approx (1-r)d_n$$

Δηλαδή το  $d_{n+1}$  θα είναι μικρότερο από το  $d_n$   
εφ' όσον  $0 < r < 2$  άρα  $p_0 = 1$  ευσταθές

Αν  $r > 2$  τότε  $p_0 = 1$  ασταθές, αλλά...

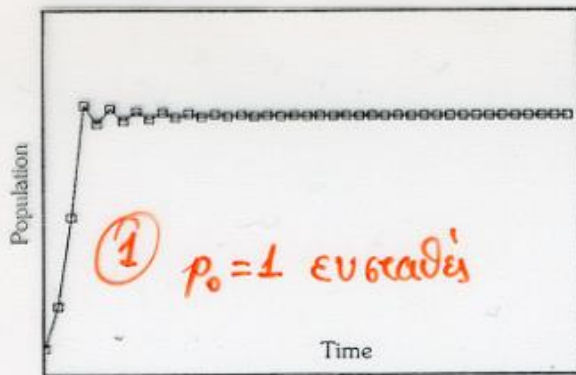


Fig. 17.  $r=1.8$

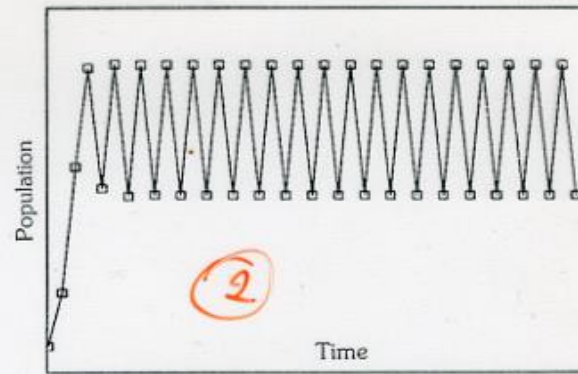


Fig. 18.  $r=2.3$

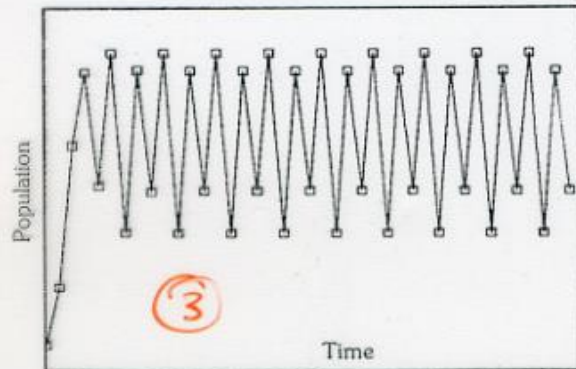


Fig. 19.  $r=2.5$

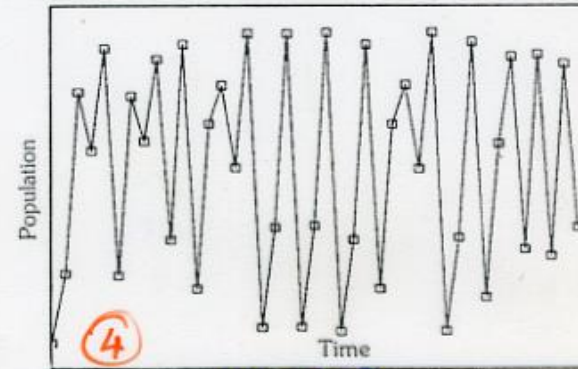


Fig. 20.  $r=3$  ( $p_0=0.1$ )

- ② Για  $2 < r < \sqrt{6} = 2.449$ :  $F^2(p_n) = F(F(p_n))$  έχει δύο ευσταθή σημεία 160 βροχίας (περιοδική τροχιά περιόδου 2)
- ③ Τώρα η  $F^4(p_n) = F(F(F(F(p_n))))$  έχει 4 ευσταθή σημεία 160 βροχίας (περιοδική τροχιά περιόδου 4)
- ④ Για  $r \geq 2.570$ : ΧΑΟΣ



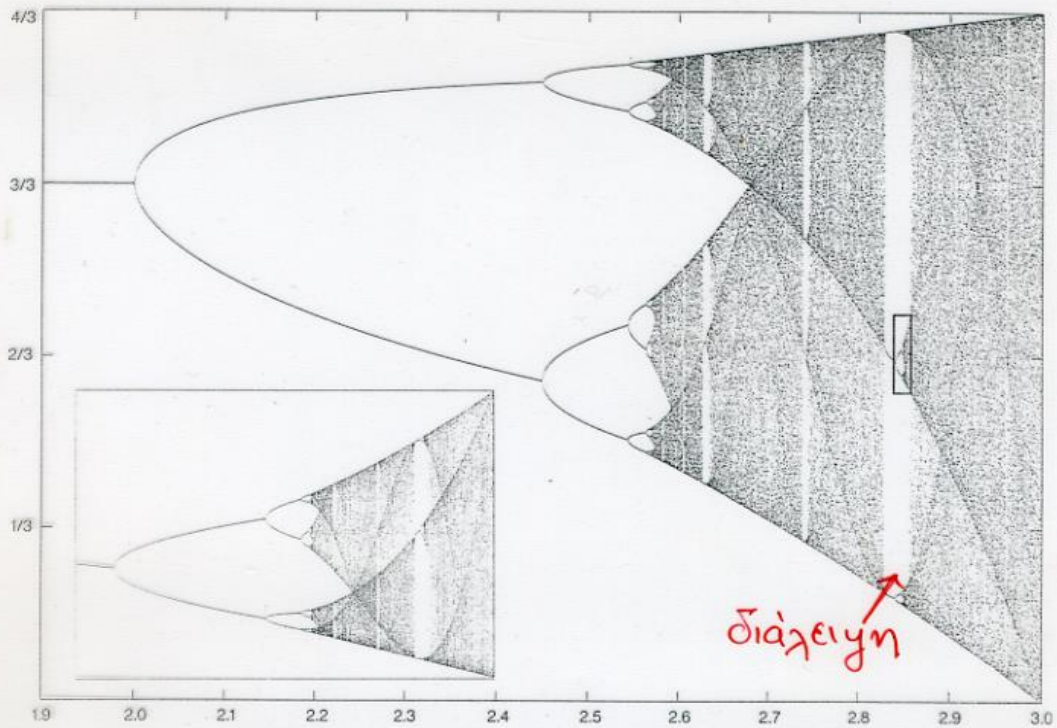


Fig. 21. The period doubling scenario of the Verhulst process (1.2). The growth parameter  $r$  varies along the abscissa ( $1.9 < r < 3$ ). For each value of  $r$ , 120 iterations of  $x$  are plotted after a transient period of 5000 iterations. The insert is a blow-up of the window indicated; the magnification is higher in the  $r$ -direction than in the  $x$ -direction

Απογοηδία Διαμαρτώσεων Διαλαβιασμού  
 Περιόδων → ΧΑΟΣ

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta = 4.66920166\dots$$

Παρόμοια σταθερά του  
 Feigenbaum  
 (και δίν είναι η μόνη)



## Fractal Basins of Attraction

$$x^4 - 1 = 0$$

$$\text{Ριζες: } 1, -1, \\ i, -i$$

ΤΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΑ ΣΥΝΟΡΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ. Η γοητευτική έλξη τεσσάρων σημείων (στους τέσσερις μαύρους κύκλους) δημιουργεί λίμνες με διαφορετικά χρώματα, με μια πολύπλοκη φράκταλ συνοριακή γραμμή. Η εικόνα αναπαριστά τον τρόπο που η μέθοδος του Νεύτωνα για την επίλυση εξισώσεων οδηγεί από διαφορετικά σημεία εκκίνησης σε μία από τις τέσσερις δυνατές λύσεις (σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση είναι  $x^4 - 1 = 0$ ).

Έωανα γνωστέο σχήμα Newton-Raphson για  
ενν εξίσωση ως εξής :

$$f(x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$x_0$  σημείο εκκίνησης

# Ένα πείραμα

Υποθέτουμε ότι ένα εκκρεμές με μεταλλική μπάλα κρέμεται από το ταβάνι. Στο πάτωμα υπάρχουν τρεις ισχυροί μαγνήτες (κόκκινος, μπλε και κίτρινος) που σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Αν κρατήσουμε την μπάλα κοντά σε ένα μαγνήτη και την αφήσουμε, η έλξη του δεν θα της επιτρέψει να κινηθεί. Αν την αφήσουμε σε κάποια άλλη θέση, το εκκρεμές θα ταλαντωθεί για λίγο μέχρι να βρεθεί κοντά σε κάποιο μαγνήτη και να ισορροπίσει.

Στην παρακάτω διαφάνεια φαίνονται τρεις περιοχές, κόκκινη, μπλε και κίτρινη. Αν το εκκρεμές ξεκινήσει από κάποιο σημείο αυτών των περιοχών, θα ισορροπήσει στον αντίστοιχο μαγνήτη. Αν όμως το σημείο εκκίνησης του εκκρεμούς βρίσκεται στην εκτεταμένη πολύχρωμη περιοχή, τότε είναι αδύνατη οποιαδήποτε πρόβλεψη, ενώ μια απειροελάχιστη διαταραχή οδηγεί σε εντελώς άλλο αποτέλεσμα (ευαίσθητη εξάρτηση του συστήματος από την επιλογή του αρχικού σημείου).

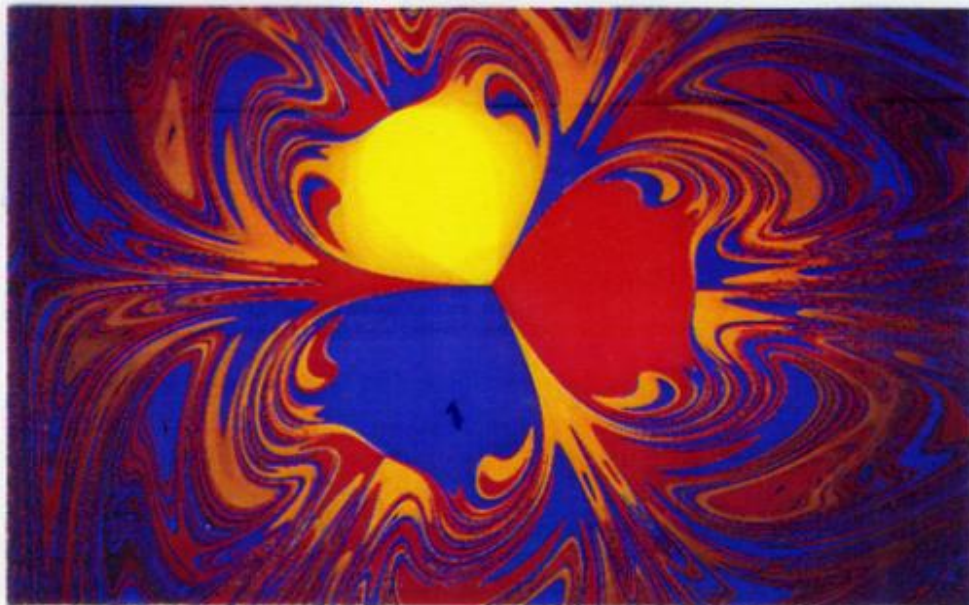
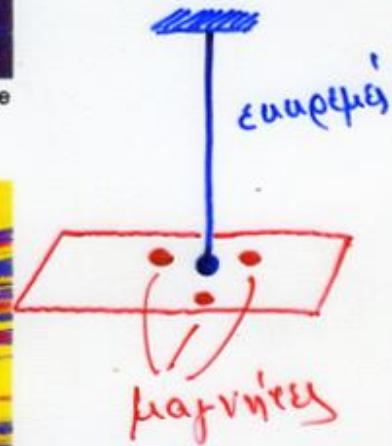


Plate 27: The pendulum experiment from section 12.8. The basins of attraction of the three magnets are colored red, blue, and yellow.



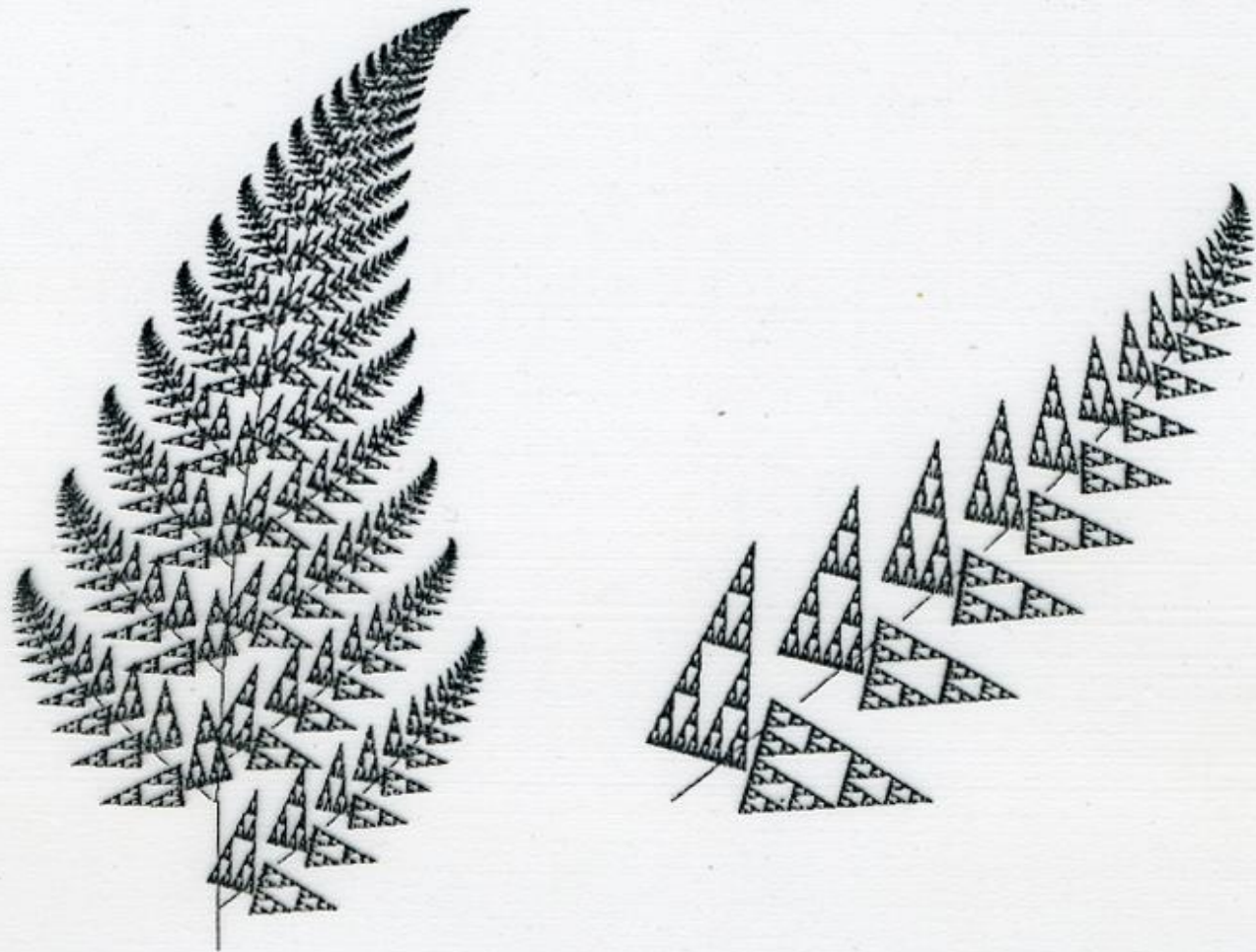
Plate 28: Detail of plate 27 showing the intertwined structure of the three basins.



# Συμπεράσματα

Βλέπουμε ότι απλά μη γραμμικά φαινόμενα μπορεί να έχουν πολύ περίπλοκη συμπεριφορά, που στον χώρο αποτυπώνεται με την μορφή φράκταλ καμπυλών. ***Αυτή είναι η Γεωμετρία της Φύσης!***

Η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες κάνει συχνά την εξέλιξη ενός μη γραμμικού φαινομένου απρόβλεπτη. Μικρά αίτια μπορούν να έχουν τεράστιες επιπτώσεις στα αποτελέσματα και ***το πεταγμα μιας πεταλούδας στο Πεκίνο μπορεί να προκαλέσει καταιγίδα στον Ατλαντικό.***



Φέρν

***Σας ευχαριστώ  
για την προσοχή σας.***



# Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- ▶ «*The Beauty of Fractals*», H.-O. Peitgen, P. Richter, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.
- ▶ «*Χάος: Η Επιστήμη της Μη Γραμμικής Δυναμικής*», J. Gleick, Εκδ. Κάτοπτρο, 1990.
- ▶ «*Δυναμικά Συστήματα και Χάος*», Α. Μπούντης, Εκδ. Παπασωτηρίου, 1995.
- ▶ «*Ο Θαυμαστός Κόσμος των Fractal*», Α. Μπούντης, Εκδ. Leader Books, 2004.
- ▶ «*Βιοαστρονομία: Συμπαντική Μελέτη της Ζωής*», Β. Ν. Ζαφειρόπουλος, Φ. Καρατζόγλου-Ζαφειροπούλου, Εκδ. Πανεπιστημίου Πατρών, 2018.
- ▶ «*Εισαγωγή στις Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*», Β. Ν. Ζαφειρόπουλος, Φ. Καρατζόγλου-Ζαφειροπούλου, Εκδ. Πανεπιστημίου Πατρών, 2013.