



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας Σχολή Θετικών Επιστημών Τμήμα Μαθηματικών

Περίληψη

Υπάρχει φυσικό νόημα στα αιτήματα του Ευκλείδη; Πόσες είναι οι διαστάσεις του σύμπαντος; Ποιες γεωμετρικές δομές περιγράφουν καλύτερα τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας; Πού οφείλονται οι ρυτιδώσεις του χωροχρονικού συνεχούς;

Ο διάλογος μεταξύ Γεωμετρίας και Φυσικής, μας βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση των γεωμετρικών αξιωμάτων και μας υποδεικνύει την απουσία μαθηματικού μοντέλου *a priori* κατάλληλου να περιγράψει το σύνολο του φυσικού κόσμου.

Ομιλητής:

Ιωάννης Ρίζος
Δρ Τμ. Μαθηματικών,
Πανεπιστημίου Πατρών

Διάλεξη με θέμα:

Η φύση και η δύναμη της Γεωμετρίας:

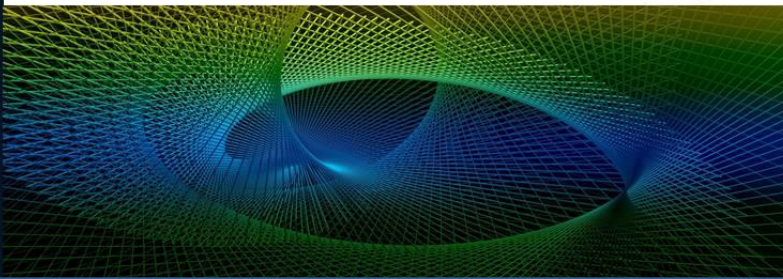
Από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη
στην

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας

Τετάρτη **15 Δεκεμβρίου 2021,**
στις **12:30**

Αμφιθέατρο Βιβλιοθήκης, Λαμία

Ηλεκτρονική Αίθουσα **MsTeams: 802yfg5**



Αναπαραστάσεις του κόσμου

Για πολλούς αιώνες οι αναπαραστάσεις της αρχαίας αστρονομίας καθόριζαν την αντίληψη του χώρου και της δομής του. Ολόκληρος ο κόσμος περιστρεφόταν φυσικά και αβίαστα γύρω από τον ίδιο σταθερό άξονα ή το ίδιο σταθερό σημείο.

Schema huius præmissæ diuisionis Sphærarum.



Για παράδειγμα...

... η κοσμολογία των Πυθαγορείων υπήρξε αδιαχώριστο κράμα ορθολογισμού και μυθοπλασίας, και ήταν αλληλένδετη με τα Μαθηματικά, τη Μουσική και τον μυστικισμό. Τα αστέρια, οι πλανήτες, ο Ήλιος και η Σελήνη, δεν ήταν απλά άψυχα στολίδια καρφωμένα στον ουράνιο θόλο. Ήταν θεία, αιώνια όντα, είχαν ψυχή και νόηση, καθώς και πλήρη αίσθηση της μουσικής αρμονίας.

Για τον λόγο αυτό...

επέλεξαν να αποκτήσουν το τελειότερο σχήμα –τη σφαίρα– και να περιφέρονται αιωνίως γύρω από τη Γη ακολουθώντας την τελειότερη τροχιά –τον κύκλο– σε αποστάσεις αντίστοιχες με τα αρμονικά διαστήματα της μουσικής κλίμακας!

Η λειτουργία αυτής της πρώιμης μαθηματικοποίησης είναι αξιοσημείωτη διότι:

- το μοντέλο δεν δημιουργείται με αποκλειστικό σκοπό να εξηγήσει μια παρατηρούμενη πραγματικότητα, αλλά αντίθετα, η πραγματικότητα εξωθείται να ικανοποιήσει τις μυστικιστικές απαιτήσεις του κοσμοθεωρητικού προτύπου.

Τον 4^ο αι. π.Χ.

... με επίκεντρο την Πλατωνική Ακαδημία, ξεκινά μια συντονισμένη προσπάθεια γεωμετρικοποίησης του χώρου που μας περιβάλλει, απαλλαγμένη από μυθολογικές δοξασίες.

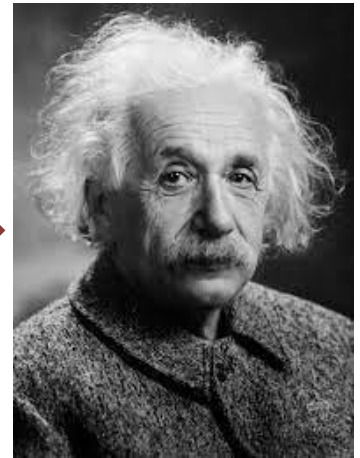
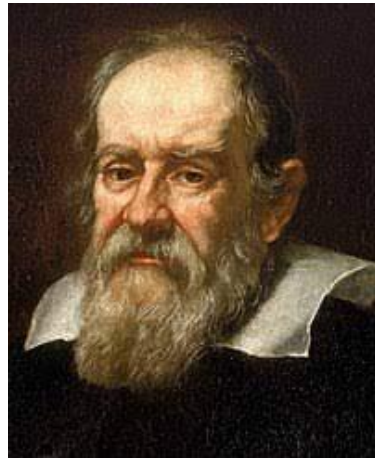
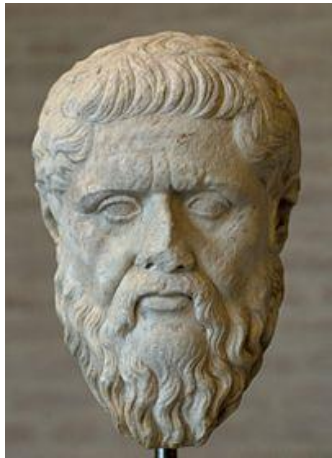
Το πρόγραμμα αυτό, γνωστό ως «*σώζειν τα φαινόμενα*», βασισμένο σε μια γεωμετρική θεωρία κίνησης σημείων επί ομαλώς περιστρεφόμενων σφαιρών, έμελλε να σημαδέψει την κοσμολογική σκέψη για πολλούς αιώνες.

Απαρχή της επιστημονικής αστρονομίας θεωρείται σήμερα το γεωκεντρικό μοντέλο του Εύδοξου του Κνίδιου και του Κάλλιππου του Κυζικηνού, το οποίο χαρακτηρίζεται από τον συνδυασμό της θεωρίας με την παρατήρηση.



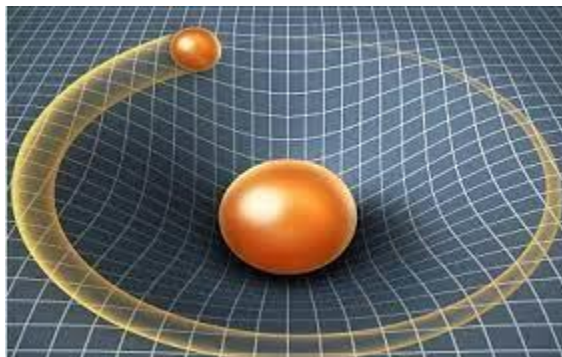
Η προ του Ευδόξου (μάλλον πυθαγόρειας προέλευσης) αντίληψη του Πλάτωνα ότι η φυσική πραγματικότητα για να είναι ορθολογική οφείλει να ενσαρκώνει μια μαθηματική δομή, μεταφράζεται στον *Τίμαιο*, από το ένα μέρος με τις κυκλικές κινήσεις των πλανητών (38c), και από το άλλο με την τριγωνική μορφή της ύλης (53c) και τα πέντε κανονικά στερεά (54a), ενώ διαπνέει το σύνολο σχεδόν των *Στοιχείων* του Ευκλείδη.

Το εντυπωσιακό είναι ότι αυτή η αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρικής θεώρησης και φυσικής θεωρίας, τοποθετημένη βέβαια σε διαφορετική φιλοσοφική και επιστημολογική βάση, πέρασε στον Γαλιλαίο, τον Νεύτωνα και τον Einstein, φτάνοντας μέχρι τις μέρες μας:

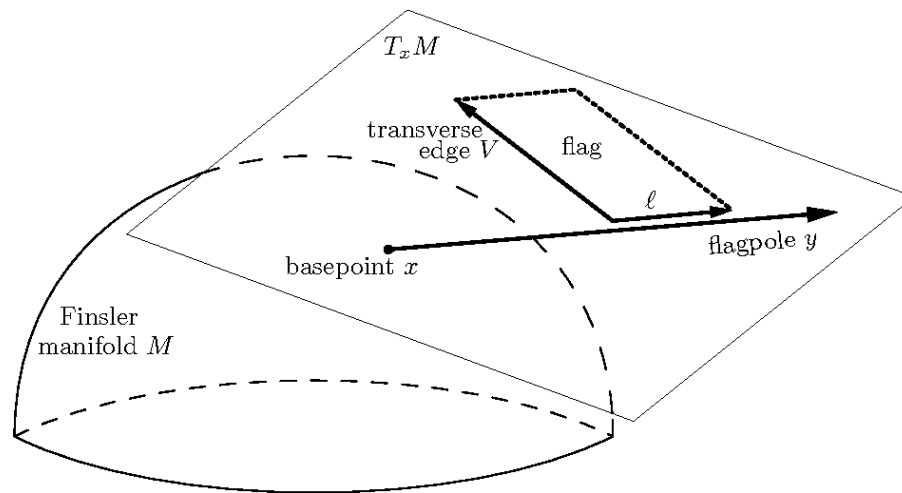


Ερωτήματα που βρίσκονται στην αιχμή της επιστημονικής έρευνας

- Πόσες είναι οι διαστάσεις του σύμπαντος;
- Ποιες γεωμετρικές δομές περιγράφουν καλύτερα τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας;
- Πού οφείλονται οι ρυτιδώσεις του χωροχρονικού συνεχούς;



Σε κάποια από τα προηγούμενα ερωτήματα φιλοδοξούν να δώσουν απάντηση μοντέρνες θεωρίες, όπως η θεωρία χορδών, η Μορφοκλασματική (Fractal) Γεωμετρία και η Γεωμετρία Finsler (η οποία αποτελεί ουσιαστικά γενίκευση της Γεωμετρίας Riemann χωρίς περιορισμό στην τετραγωνική μορφή).



Με τη σημερινή οπτική μπορεί να θεωρηθεί πως υπάρχουν, μεταξύ άλλων, δύο βασικές αφετηρίες από τις οποίες έχει τη δυνατότητα να εκκινήσει κανείς προκειμένου να διατυπώσει αξιώματα/ αρχές για μια φυσική θεωρία:

α) Η παρατήρηση

π.χ. ο Kepler αξιοποίησε μια μακρά ακολουθία παρατηρησιακών δεδομένων του T. Brahe για να διατυπώσει τους τρεις νόμους του για την κίνηση των πλανητών.

Στην περίπτωση αυτή, η θεωρία εδραιώνεται από το πείραμα και τη συνακόλουθη μαθηματική επεξεργασία και τυποποίηση.

β) Οι φιλοσοφικές πεποιθήσεις

π.χ. η παράδοση του «σώζειν τα φαινόμενα», θέτοντας αξιώματα για την κίνηση των πλανητών επί τέλειων κύκλων κ.λπ., έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη γέννηση και εξέλιξη του κλάδου της μαθηματικής Αστρονομίας, από τις ομόκεντρες σφαίρες μέχρι και το *Mysterium Cosmographicum* του πρώιμου Kepler.

Στην περίπτωση αυτή, η θεωρία δεν έχει ανάγκη νομιμοποίησης από την παρατήρηση ή το πείραμα. Η ισχύς της είναι άχρονη και αναλλοίωτη.

Πώς τίθενται τα αξιώματα στη Γεωμετρία;

Από τις αρχές της δημιουργίας της ως επιστημονικού κλάδου, η Γεωμετρία έχει θεμελιωθεί επάνω σε αξιώματα τα οποία αναφέρονται σε “σημεία”, “ευθείες” και “επίπεδα”. Ποια είναι όμως η *σχέση* αυτών των οντοτήτων με την εμπειρική γνώση η οποία προκύπτει από την παρατήρηση;

Σύμφωνα με τον Poincaré...

*«δεν πειραματιζόμαστε επί ευθειών ή κύκλων ιδανικών.
Μπορούμε να πραγματοποιήσουμε πειράματα μόνο επί
υλικών αντικειμένων»**

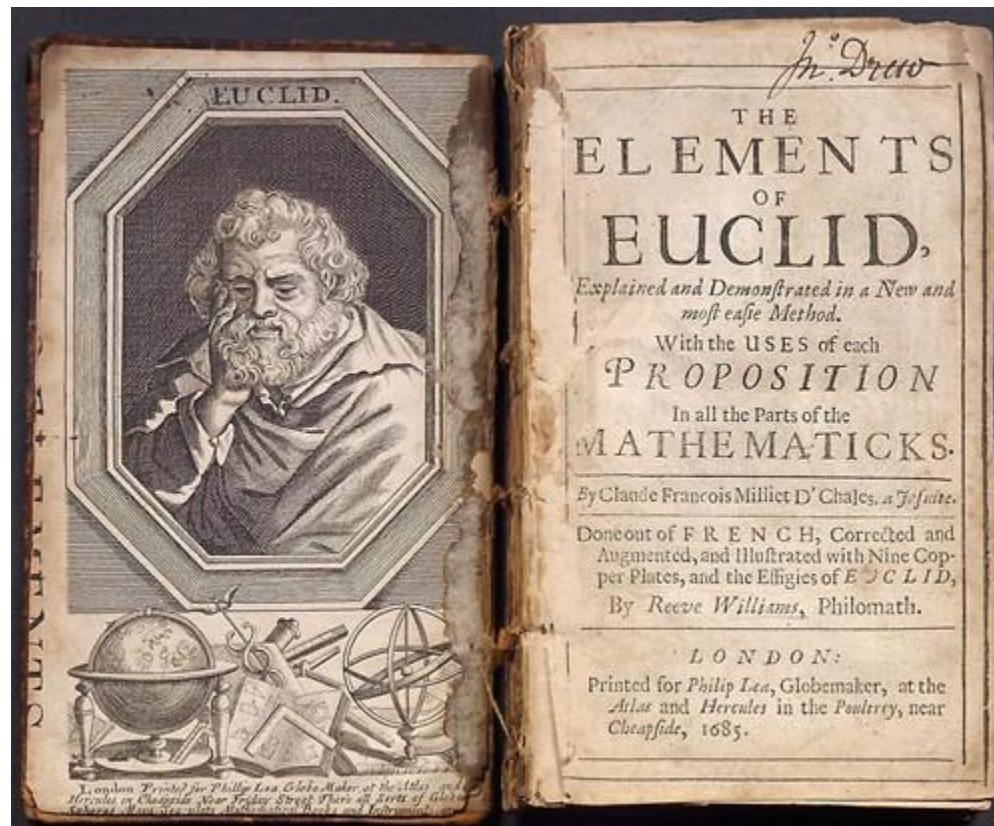
* Poincaré, H. (1952). *Science and Hypothesis*. New York: Dover, p. 49.

Η προηγούμενη άποψη...

... δείχνει τη διάσταση μεταξύ μιας αξιωματικά θεμελιωμένης Γεωμετρίας, με αξιώματα δοσμένα a priori, και μιας εξέλιξης κατευθυνόμενης από το πείραμα η οποία επιβάλλει περιορισμούς και επιτρέπει αναθεωρητικές έρευνες «*επί των υποθέσεων που κείνται στα θεμέλια της Γεωμετρίας*», όπως υποδεικνύει και ο τίτλος της διατριβής του Riemann*

* Riemann, B. (2016). On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry. In J. Jost (Ed.), *Classic Texts in the Sciences*. Basel: Birkhäuser.

Για τον ίδιο τον Ευκλείδη ωστόσο, τα αξιώματα της Γεωμετρίας δεν είναι υποθέσεις αλλά αυταπόδεικτες αλήθειες συμφυείς με τον χώρο που μας περιβάλλει.



α'. Ἡιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον
εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

- Εξασφαλίζει την *ύπαρξη* και την *κατασκευή* ευθύγραμμου τμήματος από ένα σημείο σε ένα άλλο, ενώ η *μοναδικότητα* προκύπτει σε συνδυασμό με την Πρόταση I.4, κάτι δηλαδή που συμφωνεί απόλυτα με την “καθημερινή εμπειρία” και την “κοινή λογική”.



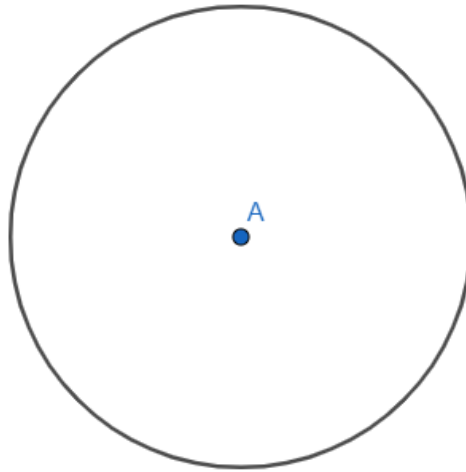
β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεΐαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ'
εὐθείας ἐκβαλεῖν.

- Εισάγει κατὰ μοναδικό τρόπο την *απειρία* στην
Ευκλείδεια Γεωμετρία.



γ' . Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

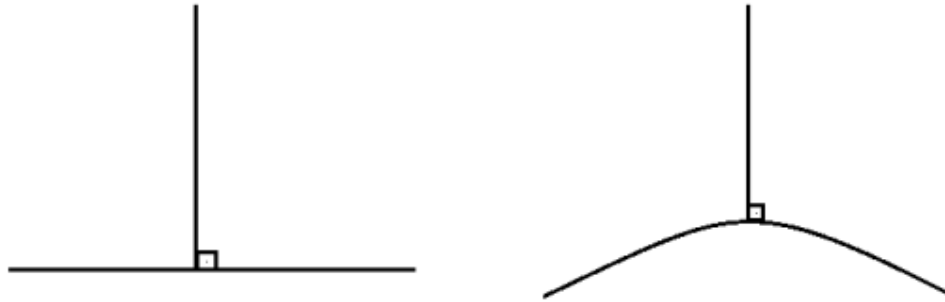
- Με το αυθαίρετα μικρό και το αυθαίρετα μεγάλο “διάστημα”, διασφαλίζει τη *συνέχεια* του χώρου.



δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

- Ο χαρακτήρας του τέταρτου αιτήματος είναι διαφορετικός σε σχέση με εκείνον των προηγούμενων, τα οποία είναι «*αιτήματα ύπαρξης*» ή απλά έχουν σκοπό «*να μας αναγγείλουν ότι επιτρέπονται οι κατασκευές με κανόνα και διαβήτη*»
- Για τον Ευκλείδη αποδεκτές γωνίες είναι μόνο οι ευθύγραμμες, διαφορετικά το αντίστροφο του αιτήματος (δηλαδή ότι «*όλες οι γωνίες που είναι ίσες με μία ορθή είναι ορθές*»), όπως απέδειξε ο Πάππος (Πρόκλος, 189,12), δεν ισχύει πάντοτε.

Επομένως ο χώρος δεν μπορεί να καμπυλώνεται και δύο ορθές γωνίες να παίρνουν τη μορφή του ακόλουθου σχήματος:



Υποθετικά άνισες ορθές γωνίες

Η ισότητα των δύο γωνιών (ως προς το μέγεθος και το σχήμα) ελέγχεται εάν τοποθετηθούν η μία επάνω στην άλλη. Η διαδικασία αυτή, γνωστή ως “εναπόθεση”, αποτελεί ένα είδος κίνησης και προϋποθέτει ότι οι γωνίες –τα σχήματα εν γένει– παραμένουν αναλλοίωτα κατά τη μεταφορά.

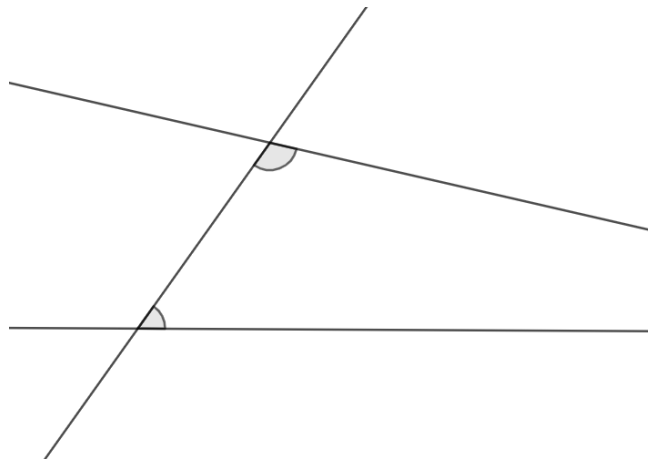
Η φύση όμως δεν μπορεί παρά να συμπεριφέρεται ομοιόμορφα, επομένως ο χώρος είναι εκ των ων ουκ άνευ *ομογενής*.

Το τέταρτο αίτημα (ιδιαίτερα εάν ιδωθεί και σε συνδυασμό με την Πρόταση I.4) έχει σκοπό να εξασφαλίσει αυτή την ομογένεια.

Συνοπτικά θα λέγαμε ότι το τέταρτο αίτημα παρέχει ένα *εγγενές πρότυπο μέτρησης γωνιών*, καθώς οι ορθές γωνίες ορίζονται γεωμετρικά και οι άλλες γωνίες έχουν πλέον τη δυνατότητα να συγκριθούν με αυτές.

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

- Ο κατάλογος των αιτημάτων του Βιβλίου Ι των *Στοιχείων* κλείνει με το πέμπτο και γνωστότερο “αίτημα των παραλλήλων” που, αν συγκριθεί το ύφος του με εκείνο των προηγουμένων, φαίνεται να το πρόσθεσε ο ίδιος ο Ευκλείδης προκειμένου να στηρίξει το οικοδόμημά του.



Από πουθενά δεν προκύπτει ότι οι δύο κύκλοι που φέρνουμε από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος τέμνονται

α'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τριγώνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB .

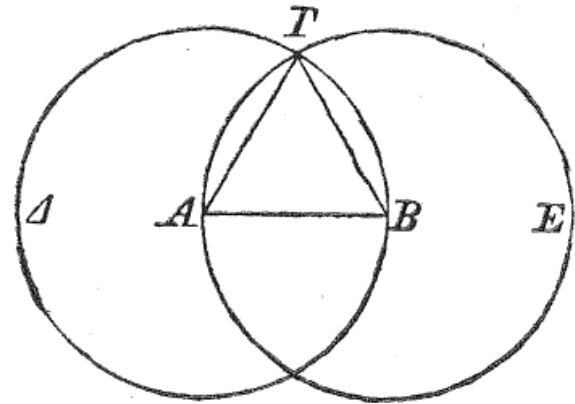
Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τριγώνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ A διαστήματι δὲ τῷ AB κύκλος γεγράφθω ὁ $BΓΔ$, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ BA κύκλος γεγράφθω ὁ $ΑΓΕ$, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΓΑ, ΓΒ$.

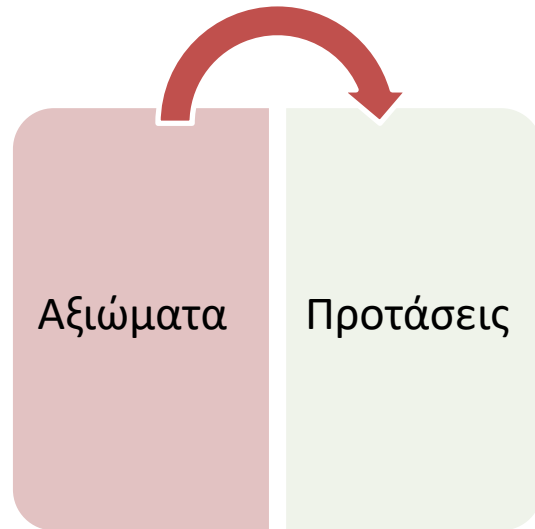
Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΔΒ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ AB · πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΑΕ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ BA . ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $ΓΑ$ τῇ AB ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν $ΓΑ, ΓΒ$

τῇ AB ἐστὶν ἴση· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ $ΓΑ$ ἄρα τῇ $ΓΒ$ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΓΑ, AB, ΒΓ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς AB .



Αν οι βασικές ιδιότητες του χώρου (συνέχεια, ομογένεια κ.λπ.) οι οποίες εισάγονται με τα πέντε αιτήματα μπορούσαν να οριστούν κατάλληλα, τότε όλα τα αξιώματα θα μετατρέπονταν σε αποδείξιμες προτάσεις.

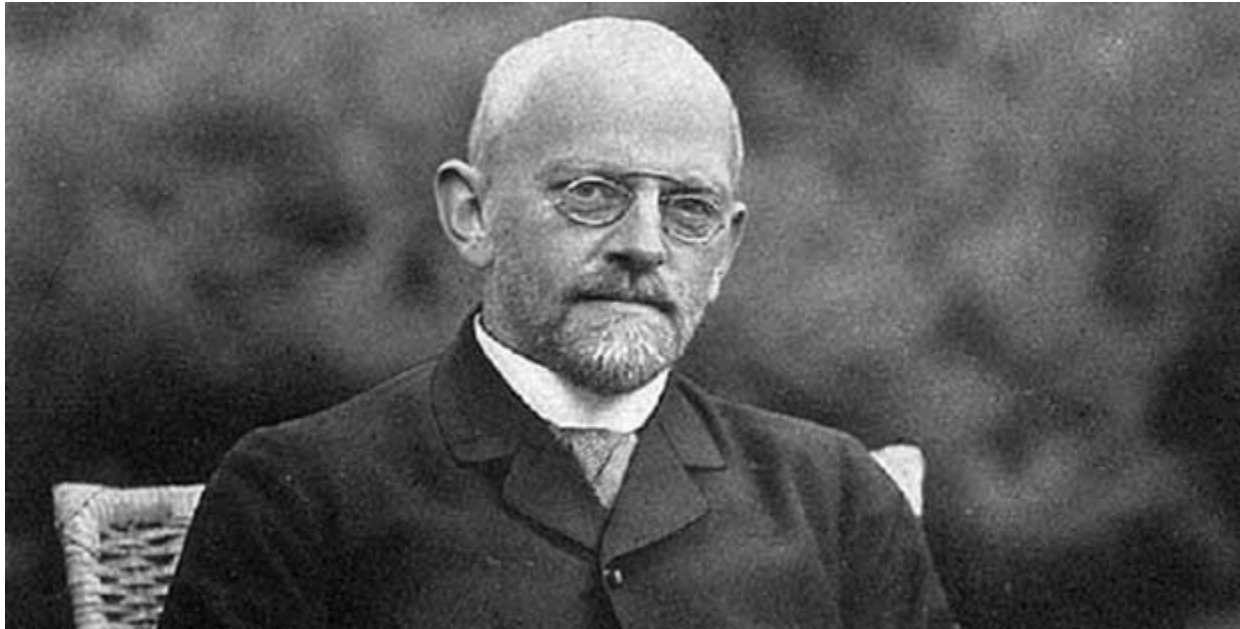


Η θεώρηση του Ευκλείδη δεν είναι η μόνη δυνατή αναφορικά με το πώς τίθενται τα αξιώματα

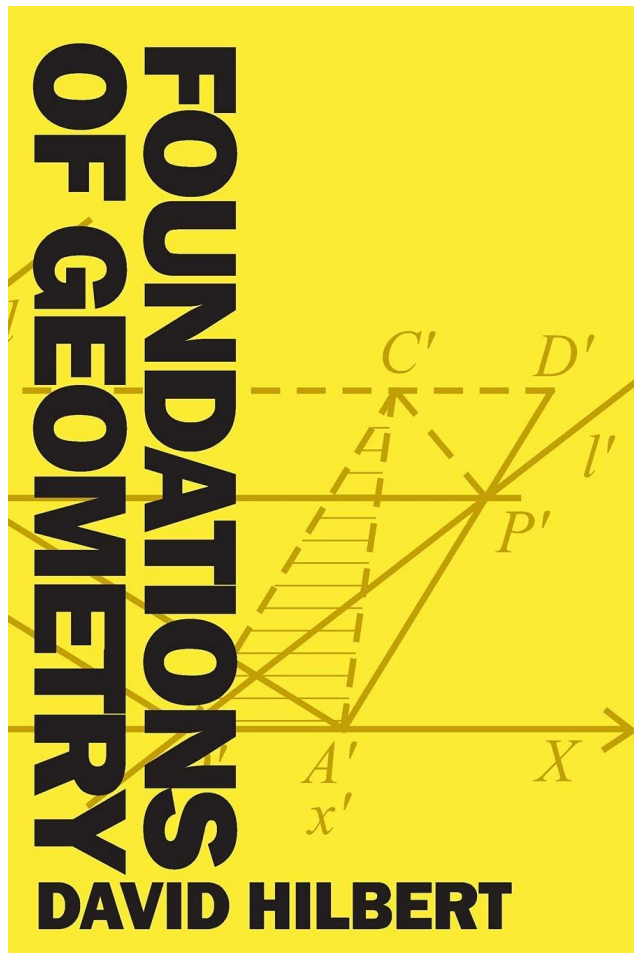
Από τις αρχές του 16^{ου} αιώνα είχε ήδη αρχίσει να ασκείται κριτική στα *Στοιχεία*, η οποία σε συνδυασμό με τις προσπάθειες απόδειξης του πέμπτου αιτήματος, οδήγησε στην ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών από τους Gauss, Lobachevsky και Bolyai.

Τότε μόνο έγινε σαφής η διάκριση μεταξύ της γεωμετρίας ως τυπικού αξιωματικού συστήματος και της γεωμετρίας ως πλαισίου μελέτης του φυσικού σύμπαντος.

Διαζύγιο από τη διαίσθηση

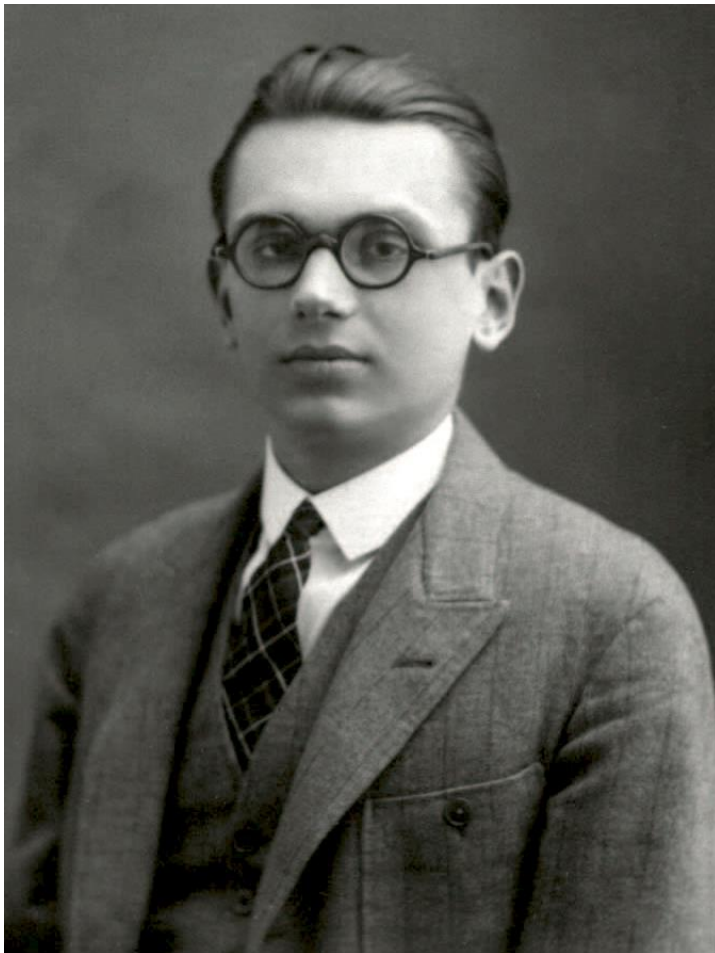


Wir müssen wissen – wir werden wissen



Ο Hilbert έθεσε 20 αξιώματα σε 5 ομάδες, πιστεύοντας ότι με αυτή την αυστηρότητα θα θεμελίωνε ακλόνητα το γεωμετρικό του οικοδόμημα και θα απάλλασσε οριστικά τα Μαθηματικά από κάθε εσωτερική αντίφαση ή αντινομία.

Kurt Gödel (1906-1978)



Σε ηλικία 25 ετών γκρέμισε οριστικά και αμετάκλητα το «όνειρο του Hilbert».

$$\begin{aligned} T \vdash \psi &\Rightarrow T \vdash \forall y \neg \Theta(\overline{\Gamma\psi}, y) \\ &\Rightarrow T \vdash \neg \Theta(\overline{\Gamma\psi}, \bar{a}), \text{ για κάθε } a \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \neg Pf_T(\overline{\Gamma\psi}, a), \text{ για κάθε } a \in \mathbb{N}, \\ &\Rightarrow T \not\vdash \psi \text{ (άτοπο)}. \end{aligned}$$

Όσον αφορά την άρνηση, αν

$$\begin{aligned} T \vdash \neg \psi &\Rightarrow T \vdash \exists y \Theta(\overline{\Gamma\psi}, y) \\ &\Rightarrow \mathcal{N} \models \exists y \Theta(\overline{\Gamma\psi}, y), \text{ επειδή } T \subseteq Th(\mathcal{N}) \\ &\Rightarrow \mathcal{N} \models \Theta(\overline{\Gamma\psi}, \bar{a}), \text{ για κάποιο } a \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow T \not\vdash \neg \Theta(\overline{\Gamma\psi}, \bar{a}), \text{ επειδή } T \subseteq Th(\mathcal{N}) \\ &\Rightarrow Pf_T(\overline{\Gamma\psi}, a), \text{ επειδή } \Theta \text{ αναπαριστά τον } Pf_T \\ &\Rightarrow T \vdash \psi \text{ (Άτοπο)}. \end{aligned}$$

Τι είναι, τελικά, η Γεωμετρία;

- Πρακτικές εφαρμογές για τη «μέτρηση της γης» στην αρχαία Αίγυπτο (Ηρόδοτος, *Ιστορίαι*, II,109)



- Θαλής
- Ευκλείδης

Τι είναι, τελικά, η Γεωμετρία;

- Για μεγάλο χρονικό διάστημα υπήρχε η πεποίθηση πως η Γεωμετρία είναι «η μελέτη των επίπεδων και στερεών σχημάτων», μέχρι που τον 17^ο αιώνα ο Descartes με τη *Γεωμετρία* και ο Fermat με την *Εισαγωγή στους επίπεδους και στερεούς τόπους*, έδειξαν πως η Γεωμετρία μπορεί να βασιστεί στην έννοια του αριθμού και να μετατραπεί σε Ανάλυση με την εισαγωγή ενός συστήματος συντεταγμένων στο επίπεδο.



Immanuel Kant (1724-1804)

Έως τα τέλη του 18^{ου} αιώνα και τον καταλυτικό ρόλο που διαδραμάτισε ο Kant, είχε καθιερωθεί η άποψη ότι η Γεωμετρία αποτελεί «τη μελέτη του χώρου», του οποίου η γνώση δεν μπορεί να είναι εμπειρική αλλά συνθετική a priori, συνέπεια του τρόπου δόμησης του νου.

Τον 19^ο αιώνα η κατάσταση στη Γεωμετρία είχε περίπου ως εξής:

- Από τη μια μεριά υπήρχαν οι συνθετικοί γεωμέτρες, βασιζόμενοι σε καθαρά γεωμετρικές μεθόδους και σημείο εκκίνησης τα αξιώματα, όπως ο Poncelet, ο Steiner και ο von Staudt, και από την άλλη οι αναλυτικοί γεωμέτρες, στηριζόμενοι σε αλγεβρικές πρακτικές, όπως ο Plücker, ο Cayley και ο Grassmann.
- Υπήρχε η Παραστατική και η Προβολική Γεωμετρία, είχε διατυπωθεί η «αρχή του δυϊσμού», ενώ το αρχαίο ερώτημα για την ανεξαρτησία του πέμπτου αιτήματος είχε απαντηθεί από τους Gauss, Lobachevsky και Bolyai κατακερματίζοντας ακόμη περισσότερο τη Γεωμετρία.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)



Felix Klein (1849-1925)



Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg



«Erlangen Program»

- Γεωμετρία είναι «η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μια συγκεκριμένη ομάδα μετασχηματισμών».
- Οποιαδήποτε ταξινόμηση ομάδων μετασχηματισμών, μετατρέπεται σε κωδικοποίηση γεωμετριών.
- Η σχέση μεταξύ των σχημάτων είναι *σχέση ισοδυναμίας*, άρα τα σχήματα ταξινομούνται σε κλάσεις ισοδυναμίας, με μοναδική διαφορά τη θέση τους σε κάθε γεωμετρία.

Έστω G μια ομάδα και X ένα μη κενό σύνολο. Θεωρούμε την απεικόνιση $\delta: G \times X \rightarrow X$ με $\delta(g, x) = g \cdot x$ τέτοια ώστε:

- i. $\delta(e, x) = x$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G
- ii. $\delta(g_1, \delta(g_2, x)) = \delta(g_1 g_2, x)$

Αν ισχύουν τα παραπάνω, τότε η απεικόνιση δ καλείται *δράση* της ομάδας G επί του συνόλου X . Το ζεύγος (G, X) καλείται *Γεωμετρία κατά Klein*.

Για παράδειγμα...

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία (στις δύο διαστάσεις) είναι η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων των σχημάτων, συμπεριλαμβανομένου του μήκους και του εμβαδού, που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από την ομάδα των μετασχηματισμών η οποία αποτελείται από *μεταφορές* και *στροφές* στο επίπεδο – ομάδα ουσιαστικά ισοδύναμη με το τέταρτο αίτημα του Ευκλείδη, τουλάχιστον με το περιεχόμενο που του αποδώσαμε προηγουμένως.

Εννέα Γεωμετρίες Cayley-Klein στο επίπεδο

		Μέτρο μήκους		
		Ελλειπτικό	Παραβολικό	Υπερβολικό
Μέτρο γωνιών	Ελλειπτικό	Ελλειπτική γεωμετρία	Ευκλείδεια γεωμετρία	Υπερβολική γεωμετρία
	Παραβολικό	συν-Ευκλείδεια γεωμετρία	Γεωμετρία Galileo	συν-Minkowski γεωμετρία
	Υπερβολικό	συν-υπερβολική γεωμετρία	Γεωμετρία Minkowski	Διπλή υπερβολική γεωμετρία

*«Στο Πρόγραμμα Erlangen εμφανίστηκε για πρώτη φορά μια τάση η οποία συνίστατο στη σύνδεση ανάμεσα σε απομακρυσμένες περιοχές [των Μαθηματικών], δημιουργώντας έτσι νέες καρποφόρες δυνατότητες έρευνας και συμβάλλοντας στην υπέρβαση των κινδύνων κατακερματισμού της επιστήμης»**

* Carathéodory, C. (1919). Die Bedeutung des Erlanger Programms. *Naturwissenschaften* 7, 297-300 [Gesammelte Mathematische Schriften, Vol. 5, pp. 45-51 (Munich, 1957)].

Τρεις επίπεδες γεωμετρίες

- Ακολουθώντας την άποψη του Klein για τη Γεωμετρία και αποφεύγοντας να δεχτούμε ως αξίωμα κάτι το οποίο μπορεί να προκύψει από τη μελέτη των φυσικών φαινομένων (π.χ. από τη μελέτη της κίνησης ρευματοφόρου αγωγού σε μαγνητικό πεδίο), παρουσιάζουμε συνοπτικά ορισμένα βασικά στοιχεία τριών γεωμετριών στις δύο διαστάσεις.

1) Ευκλείδεια Γεωμετρία

Το σύνηθες Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (a, b) \mapsto \langle a, b \rangle := x_1x_2 + y_1y_2$$

Ευκλείδεια νόρμα

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Απόσταση διανυσμάτων

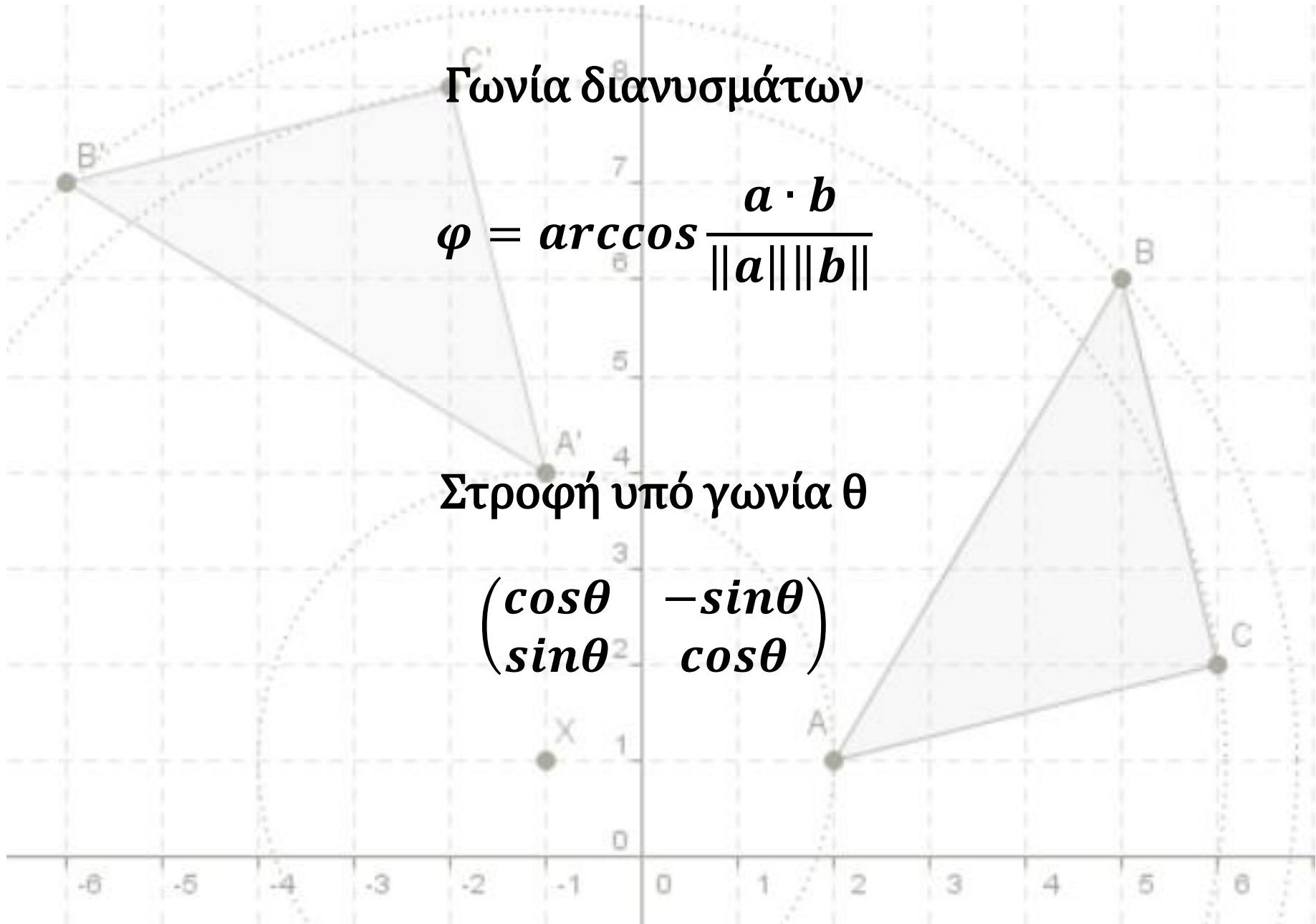
$$\|a - b\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Γωνία διανυσμάτων

$$\varphi = \arccos \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$$

Στροφή υπό γωνία θ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



2) Γεωμετρία Galileo

«Δύο παρατηρητές κινούμενοι ομαλά, ο ένας ως προς τον άλλον, θα πρέπει να αντιλαμβάνονται τους φυσικούς νόμους με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Κανένας παρατηρητής δεν μπορεί να διακρίνει την απόλυτη ηρεμία από την απόλυτη κίνηση, σε όποιον φυσικό νόμο κι αν προσφύγει. Γι' αυτό τον λόγο δεν υπάρχει *απόλυτη* κίνηση, αλλά μόνο κίνηση *σχετική* με κάποιον παρατηρητή»

Μαθηματικοποίηση

Για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, μετρούμενες από τα δύο Α.Σ.Α., ισχύει (στον απόλυτο *χώρο* και *χρόνο* της Νευτώνειας Μηχανικής) ότι $\Sigma F = \Sigma F'$ δηλαδή

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{d^2 r'}{dt'^2}$$

όπου (r, t) και (r', t') η θέση και ο χρόνος του σώματος στα δύο συστήματα αντίστοιχα.

Σε περίπτωση μονοδιάστατης κίνησης (π.χ. στον άξονα των x) και με σχετική ταχύτητα u του Σ' ως προς το Σ , που δεν είναι συγκρίσιμη με την ταχύτητα του φωτός, η προηγούμενη ισότητα των δυνάμεων ισχύει αν και μόνο αν οι συντεταγμένες συνδέονται μεταξύ τους με τους λεγόμενους «μετασχηματισμούς Galileo»:

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

Αν περιοριστούμε μόνο στα x και t και συμβολίσουμε με y τη χωρική συντεταγμένη και με x τη χρονική ενός σημείου (σημειακής μάζας) κατά τη μονοδιάστατη κίνησή του, τότε οι παραπάνω μετασχηματισμοί γίνονται:

$$y' = y - ux, \quad x' = x.$$

Στη γλώσσα της Γραμμικής Άλγεβρας, οι μετασχηματισμοί αυτοί περιγράφονται με τη βοήθεια πινάκων ως:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3) Γεωμετρία Minkowski

- Η Γεωμετρία Minkowski (στις δύο διαστάσεις) είναι η μελέτη των ιδιοτήτων του επιπέδου που παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τη δράση των μετασχηματισμών Lorentz.
- Ένας τρόπος για την παραγωγή των μετασχηματισμών αυτών, αντίστροφα από την ιστορική ροή αλλά με φυσικό νόημα, είναι να ξεκινήσουμε από τα δύο αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

- Αποδεικνύεται ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz με παράμετρο u , όπου $|u| < c = 1$, στο επίπεδο $\{x, t\}$, δηλαδή στον δισδιάστατο χωροχρόνο, είναι:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}x - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}y, \quad y' = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}y$$

- Υπερβολική στροφή

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Νόρμα

$$\|a\| = \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2}, & \text{αν } a \text{ χωροειδές} \\ \sqrt{y^2 - x^2}, & \text{αν } a \text{ χρονοειδές} \\ 0 & , \text{αν } a \text{ φωτοειδές} \end{cases}$$

- Απόσταση δυο διανυσμάτων $a = (x_1, y_1)$ και $b = (x_2, y_2)$ (του ιδίου είδους)

$$\|a - b\| = \sqrt{|(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2|}$$

- Γωνία φ δύο διανυσμάτων

$$\varphi = \operatorname{arccosh} \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$$

Προς μία ενοποίηση...

Οι προηγούμενες τρεις μετρικές των μηκών θα μπορούσαν να ενοποιηθούν, εφόσον ενοποιηθούν τα εσωτερικά γινόμενα με τη βοήθεια του τύπου

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (a, b) \mapsto \langle a, b \rangle := x_1 x_2 + \varepsilon y_1 y_2$$

όπου η παράμετρος ε παίρνει τις τιμές $-1, 0, 1$ και οδηγεί στο εσωτερικό γινόμενο, και κατ' επέκταση στη μετρική, Minkowski, Galileo και Ευκλείδη αντίστοιχα.

Κάποιες διδακτικές προεκτάσεις

- Δυσκολίες κατά τη διδασκαλία στο Λύκειο
- Ύλη, προσέγγιση, εμπειρίες των μαθητών
- Χρονικοί περιορισμοί
- Η μετάβαση στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση
- Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη
- Γεωμετρικοί τόποι

Όμως...

- διδακτικά σενάρια
- νοητικά πειράματα
- η έννοια και ο ρόλος της μετρικής

Η φύση και η δύναμη της Γεωμετρίας

Η Γεωμετρία ως πλαίσιο συζήτησης και διερεύνησης:

α) του τρόπου θεώρησης και του ρόλου των αξιωμάτων

β) της πρακτικής της μέτρησης

γ) της έννοιας του «χώρου» και της μοντελοποίησής του

δ) της αλληλεπίδρασης της μαθηματικής θέασης με τη φυσική θεωρία

ε) της σημασίας των μετασχηματισμών και των αναλλοιώτων τους, άρα και των διαφορετικών αναπαραστάσεων ενός σχήματος από γεωμετρία σε γεωμετρία και

στ) επεισοδίων από την Ιστορία των Μαθηματικών.

Στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας
γίνονται προσπάθειες προς αυτή την κατεύθυνση...



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Βασική βιβλιογραφία

- Ρίζος, Ι. & Γκρέκας, Ν. (2021). Θεωρήσεις για τη φύση της Γεωμετρίας. *Ευκλείδης Γ'*, 95, 41-60.
- Ρίζος, Ι., Κολοκοτρώνης, Γ. & Παπανικολάου, Α. Μ. (2020). Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. *Πρακτικά 37^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Τόμος Α'* (Πρακτικά 2020), σσ. 351-361. Αθήνα: Ε.Μ.Ε.
- Ρίζος, Ι. (2018). Φιλοσοφικές και επιστημολογικές θεωρήσεις της έννοιας του χώρου. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 89, 43-60.
- Ρίζος, Ι. (2018). *Εισαγωγή των μαθητών Λυκείου στη δισδιάστατη Γεωμετρία Minkowski μέσω διδακτικών σεναρίων και νοητικών πειραμάτων*. PhD thesis. Πανεπιστήμιο Πατρών. Διαθέσιμη στο Εθνικό Αρχείο Διδακτορικών Διατριβών: <https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/42890>
- Rizos, I., Patronis, A. & Lappas, D. (2017). "There is one Geometry and in each case there is a different formula". Students' conceptions and strategies in an attempt of producing a Minkowskian Metric on Space-Time. *Science & Education*, 26(6), 691-710. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11191-017-9915-1>
- Ρίζος, Ι. (2007). *Μοντέλα Επίπεδων Γεωμετριών*. MEd thesis. Ε.Κ.Π.Α. Τμήμα Μαθηματικών. Διαθέσιμη στο: http://me.math.uoa.gr/dipl/dipl_Rizos.pdf