Τελεστές Μετατόπισης

Χαράλαμπος Μαγιάτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ – ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

- Θεωρούμε $\mathcal{H}$ έναν μιγαδικό, διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$. Συμβολίζουμε $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο και $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ τη νόρμα του $\mathcal{H}$.

- Θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ τον χώρο των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, με την supremum νόρμα

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \sup \left\{ \|Tx\|_{\mathcal{H}} : x \in \mathcal{H} \text{ και } \|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1 \right\}.$$

- Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, θα συμβολίζουμε T^* το συζυγή τελεστή του T. Υπενθυμίζουμε,

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \ \ \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

- Ο τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = TT^* = I$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

- Ο τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται ισομετρία αν $\|Tx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, (ισοδύναμα $T^*T = I$).

- Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ισχύει ότι $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.

Ορισμός (τελεστής δεξιάς μετατόπισης)

Ο τελεστής δεξιάς μετατόπισης S (forward shift) επί του $\mathcal{H}$, ορίζεται από τη σχέση

$$Se_i = e_{i+1}, \ \textit{για} \ i = 1, 2, \ldots .$$

π.χ. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x(n))_{n\in\mathbb{N}} = (x(1), x(2), x(3), \ldots) : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^2 < \infty \right\},$$

με βάση $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, όπου $e_i = (e_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $e_i(n) = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$.

Τότε:

$$S : (x(1), x(2), x(3), \ldots) \mapsto (0, x(1), x(2), x(3), \ldots).$$

Τελεστές μετατόπισης

Εισαγωγή

- Ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή S ως προς τη βάση $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, είναι

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Ο τελεστής S είναι 1-1 αλλά όχι επί.

- Ο τελεστής S είναι ισομετρία.

Ορισμός (τελεστής αριστερής μετατόπισης)

Ο τελεστής αριστερής μετατόπισης (backward shift) επί του $\mathcal{H}$, ορίζεται από τη σχέση

$$S^* e_i = \begin{cases} 0, & \text{για } i = 1, \\ e_{i-1}, & \text{για } i = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

π.χ. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x(n))_{n\in\mathbb{N}} = (x(1), x(2), x(3), \ldots) : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^2 < \infty \right\},$$

με βάση $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, όπου $e_i = (e_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $e_i(n) = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$.

Τότε:

$$S^* : (x(1), x(2), x(3), \ldots) \mapsto (x(2), x(3), \ldots).$$

- Ο πίνακας που αντιστοιχεί στον τελεστή S^* ως προς τη βάση $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, είναι

$$S^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Ο τελεστής S^* είναι επί αλλά όχι 1-1.
- Ο τελεστής S^* είναι ο συζυγής τελεστής του S.
- $\|S^*\| = 1$.

Πρόταση

Για τους τελεστές S, S^* ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $S^*S = 1$ *και* $SS^* : \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} x(n)e_n$.
2. *Ο τελεστής S είναι μη-unitary ισομετρία.*
3. *Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, έχουμε ότι $(S^*)^n x \to 0$.*

Ορισμός (ιδιοτιμή)

Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ένας μιγαδικός αριθμός λ λέγεται ιδιοτιμή του T αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ ώστε $Tx = \lambda x$, το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.
Το σύνολο των ιδιοτιμών του T συμβολίζεται $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ και λέγεται σημειακό φάσμα του T,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{υπάρχει μη μηδενικό } x \in \mathcal{H} \text{ ώστε } Tx = \lambda x\}.$$

- Αν ο $\mathcal{H}$ είναι μη μηδενικός μιγαδικός χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ έχει ιδιοτιμές, δηλαδή $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \neq \emptyset$.
  Χωρίς την υπόθεση ότι ο χώρος Hilbert είναι μιγαδικός ή πεπερασμένης διάστασης, το παραπάνω δεν είναι αληθές.

- $\sigma_{\mathrm{p}}(S) = \emptyset$

Απόδειξη Το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή διότι ο S είναι 1-1:

$$Sx = \lambda x \Leftrightarrow Sx = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ιδιοτιμή του S, υπάρχει μη-μηδενικό $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n \in \mathcal{H}$ ώστε

$$\begin{aligned} Sx = \lambda x \quad &\Leftrightarrow \quad S\left(\sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n\right) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x(n) e_n \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} x(n-1) e_n = \lambda x(1) e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda x(n) e_n. \end{aligned}$$

Άρα $x_1 = 0$ και $x(n-1) = \lambda x(n)$ για $n \geq 2$, δηλαδή $x = 0$, άτοπο. $\square$

Λήμμα

Εάν λ μία ιδιοτιμή του τελεστή $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τότε $|\lambda| \leq \|T\|$.

Απόδειξη Έστω λ μία ιδιοτιμή του T και x το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε

$$Tx = \lambda x.$$

Γνωρίζουμε ότι $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Επομένως,

$$\|\lambda x\| = \|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \Rightarrow \quad |\lambda|\|x\| \leq \|T\|\|x\| \Rightarrow \quad |\lambda| \leq \|T\|.$$

$\square$

- $\sigma_{\mathrm{p}}(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Απόδειξη Από το Λήμμα, εάν $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(S^*)$ τότε $|\lambda| \leq \|S^*\| = 1$.
Εάν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| < 1$, τότε για το διάνυσμα $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} e_n$ έχουμε

$$S^*(x) = S^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} e_n = \lambda x.$$

Συνεπώς, κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| < 1$ είναι ιδιοτιμή του S^*.
Εάν $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$, για το διάνυσμα $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} S^*(x) = \lambda x \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x(n+1) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda x(n) e_n \\ &\Rightarrow \quad x(n+1) = \lambda x(n) \Rightarrow x(n) = \lambda^{n-1} x(1), \end{aligned}$$

το οποίο δεν είναι αληθές. $\square$

Τελεστές μετατόπισης
Φάσμα

Ορισμός

Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, *το φάσμα του τελεστή είναι το σύνολο*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο τελεστής } T - \lambda I \text{ δεν έχει αντίστροφο}\}.$$

Παρατήρηση

Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, *τότε* $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$.

Θεώρημα

Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, *το φάσμα* $\sigma(T)$ *είναι μη κενό, κλειστό υποσύνολο του* $\mathbb{C}$ *και φραγμένο από τη νόρμα του* T,

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \leq \|T\|.$$

- $\sigma(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \leq 1\}$.

- $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \leq 1\}$.

Λήμμα

Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τότε $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \bar{\lambda} \in \sigma(T)\}$.

Απόδειξη Έχουμε

$$AB = I = BA \quad \Leftrightarrow \quad B^*A^* = I = A^*B^*.$$

Άρα, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι και ο A^*. Επιπλέον $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Θέτοντας $A = T - \lambda I$, η απόδειξη είναι άμεση. □

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ένας υπόχωρος $\mathcal{W}$ του $\mathcal{H}$:

1. *λέγεται αναλλοίωτος από τον T, (ή T-αναλλοίωτος), εάν $Tx \in \mathcal{W}$ για κάθε $x \in \mathcal{W}$.*
2. *λέμε ότι ανάγει τον T, (T-reducing), εάν οι $\mathcal{W}$ και $\mathcal{W}^{\perp}$ είναι T-αναλλοίωτοι.*

Θεώρημα

Δεν υπάρχει υπόχωρος που ανάγει τον τελεστή μετατόπισης S.

Απόδειξη Θεωρούμε ότι ο W ανάγει τον S. Έστω $S|_W$ (αντίστοιχα $S|_{W^\perp}$) ο περιορισμός του S στο W (αντίστοιχα στο $W^\perp$). Αφού ο S είναι 1-1 θα είναι και οι $S|_W$ και $S|_{W^\perp}$. Αφού το range του S έχει συν-διάσταση 1, ένας από τους $S|_W$ και $S|_{W^\perp}$, είναι επί. Θεωρούμε ότι ο $S|_W$ είναι επί και άρα αντιστρέψιμος. Τότε είναι αντιστρέψιμος και ο $(S|_W)^*$ και αυτός είναι ισομετρία. Για $x \in W$ έχουμε

$$\|(S^*)^n x\| = \|((S|_W)^*)^n x\|.$$

Όμως $(S^*)^n x \to 0$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Ορισμός

Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται τελεστής μετατόπισης πολλαπλότητας m, εάν υπάρχει διάσπαση του χώρου Hilbert $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_i$ σε κάθετους ανά δύο υποχώρους $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ της ίδιας διάστασης m και ο T απεικονίζει ισομετρικά τον $\mathcal{H}_i$ επί του $\mathcal{H}_{i+1}$. Η διάσταση m των $\mathcal{H}_i$ λέγεται πολλαπλότητα του T.

Θεώρημα (Διάσπαση Wold)

Εάν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μία ισομετρία, τότε υπάρχει μοναδική διάσπαση $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_u$ σε T-reducing υποχώρους, ώστε ο περιορισμός T_s του T στον $\mathcal{H}_s$ είναι ένας τελεστής μετατόπισης κάποιας πολλαπλότητας και ο περιορισμός T_u του T στον $\mathcal{H}_u$ είναι ένας unitary τελεστής.

Τελεστές μετατόπισης

Διάσπαση Wold

Θεωρούμε $L = \mathcal{H} \ominus T(\mathcal{H})$.
Αν $x, y \in L$ και $n > m > 0$, τότε

$$\langle T^n x, T^m y \rangle = \langle T^{n-m} x, y \rangle = 0,$$

διότι $T^*T = I$, $y \in L$ και $T^{n-m}x \in T(\mathcal{H})$.
Άρα, η οικογένεια $\{T^n(L) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ αποτελείται από κλειστούς, (διότι T ισομετρία), ορθογώνιους ανά δύο υπόχωρους.
Θέτουμε,

$$\mathcal{H}_s = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus T^n(L).$$

Ο υπόχωρος $\mathcal{H}_s$ είναι T-αναλλοίωτος και ο περιορισμός του T στον $\mathcal{H}_s$ είναι ένας τελεστής μετατόπισης, αφού $T(T^n(L)) = T^{n+1}(L)$ και ο T είναι ισομετρία.

Παρατηρούμε ότι $T^n(L) = T^n(\mathcal{H}) \ominus T^{n+1}(\mathcal{H})$.
Πράγματι, εάν $w \in T^n(\mathcal{H}) \ominus T^{n+1}(\mathcal{H})$ υπάρχει $x \in \mathcal{H}$ ώστε $w = T^n x$.
Γράφουμε $x = y + z$, όπου $y \in L$ και $z \in T(\mathcal{H})$.
Αφού $w \in T^n(\mathcal{H}) \ominus T^{n+1}(\mathcal{H})$ και $T^n z \in T^{n+1}(\mathcal{H})$ έχουμε

$$\langle w, T^n z\rangle = 0 \Rightarrow \quad \langle T^n x, T^n z\rangle = 0 \Rightarrow \quad \langle T^n y + T^n z, T^n z\rangle = 0.$$

Όμως, $\langle T^n y, T^n z\rangle = \langle y, z\rangle = 0$.
Επομένως, $\langle T^n z, T^n z\rangle = 0 \;\Rightarrow\; z = 0$.
Άρα, $w = T^n y \in T^n(L)$.

Θέτουμε

$$\mathcal{H}_u = \cap_{n=1}^{\infty} T^n(\mathcal{H}).$$

Είναι άμεσο ότι ο $\mathcal{H}_u$ είναι αναλλοίωτος από τον T.
Εάν $x \in \mathcal{H}$, τότε το x είναι κάθετο στο $\mathcal{H}_s$ αν και μόνο αν το x είναι κάθετο στο $T^n(L)$ για κάθε $n \geq 0$ αν και μόνο αν $x \in T^n(\mathcal{H})$ για κάθε $n \geq 1$ αν και μόνο αν $x \in \mathcal{H}_u$.
Επομένως, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_u$.
Τέλος, ο $\mathcal{H}_u$ είναι αναλλοίωτος από τον T και ο T περιορισμένος στο $\mathcal{H}_u$ είναι επί. Επειδή είναι και ισομετρία είναι unitary.

Ευχαριστώ!