



Διευκρινήσεις

- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά.
- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και άριστα είναι το 10.
- Όλοι οι αριθμοί που εμφανίζονται στις εκφωνήσεις είναι ακέραιοι.
- Σωστή θεωρείται μια απάντηση που, εκτός του σωστού αποτελέσματος, περιλαμβάνει και πλήρης τεκμηρίωση.

Θέματα

1. Αν $d \mid ax + by$, $d \mid a'x + b'y$ και $(d, ab' - a'b) = 1$, δείξτε ότι $d \mid (x, y)$.
2. Έστω $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Αν $(a, b) = 1$, δείξτε ότι $(a^n, b^m) = 1$. Αν $(a, b) = p$, όπου p πρώτος, δείξτε ότι $(a^n, b^m) = p^r$, όπου $r \geq \min(m, n)$.
3. Έστω a, b, f αριθμητικές συναρτήσεις. Δείξτε ότι $(a * f) + (b * f) = (a + b) * f$, όπου $*$ το γινόμενο (συνέλιξη) Dirichlet.
4. Το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας λειτουργεί από το 2019 μέχρι και σήμερα, το 2022. Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαίρεσης 2022^{2019} δια 37.
5. Ένα καλάθι χωρητικότητας 100 αυγών είναι γεμάτο με αυγά πάνω από την μέση, αλλά δεν ξεχειλίζει. Αν αφαιρέσουμε τα αυγά κατά 7-δες, περισσεύουν 6 και αν αφαιρέσουμε τα αυγά κατά 5-δες περισσεύουν 4. Πόσα αυγά έχει το καλάθι;
6. Θεωρούμε την ισοτιμία

$$4x^{19} + 10x^{13} + 7x^{10} + 3x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Αφού βρείτε μια ισοδύναμη ισοτιμία βαθμού μικρότερου του 5, βρείτε όλες τις λύσεις της.

7. Θεωρούμε τους εξής αριθμούς: $n_1 = 8$, $n_2 = 9$, $n_3 = 10$, $n_4 = 11$ και $n_5 = 12$. Πόσα πρωταρχικά στοιχεία modulo n_i υπάρχουν, για $i = 1, 2, 3, 4, 5$;
8. Έχει η ισοτιμία $2x^2 \equiv 7 \pmod{103}$ λύση;
9. Λύστε την Διοφαντική εξίσωση $9x + 5y = 3$.
10. Λύστε την Διοφαντική εξίσωση $12x - 303y = 272$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!