



Διευκρινήσεις

- Στις εκφωνήσεις των θεμάτων εμφανίζονται οι αριθμοί α και β . Οι αριθμοί υπολογίζονται προσωπικά ως εξής: Ο α είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του ΑΜ σας και ο β το προτελευταίο. Αν ο ΑΜ σας έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό ψηφίο, τότε $\alpha = \beta$. Π.χ. αν ο ΑΜ σας είναι 140105, τότε $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, ενώ αν ο ΑΜ σας είναι 00050, τότε $\alpha = \beta = 5$. Πριν τις απαντήσεις, σημειώστε στην κόλλα σας την τιμή των α και β για την περίπτωση σας.
- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά.
- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και άριστα είναι το 10.

Θέματα

1. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(x) = x^2 + (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)$ και $g(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta$. Παραγοντοποιήστε το f πάνω από το \mathbb{Q} , το \mathbb{R} και το \mathbb{C} και στην συνέχεια παραγοντοποιήστε το g πάνω από το \mathbb{Q} και το \mathbb{Z}_2 .
2. Θεωρούμε τις εξής μεταθέσεις της S_5 :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ και } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την μετάθεση $x = \sigma^{7\alpha+6\beta}\rho$ και γράψτε την ως γινόμενο ξένων κύκλων.

3. Αν $m = 30\alpha + 23\beta$, πόσοι αριθμοί στο διάστημα $1 \leq n \leq m$ ικανοποιούν την σχέση $\text{εκπ}(m, n) = mn$;
4. Σε ποια θέση θα βρίσκεται ο ωροδείκτης ενός 12ωρου ρολογιού μετά από $79^{50\alpha+199\beta}$ ώρες; Υποθέστε ότι αυτήν την στιγμή ο ωροδείκτης βρίσκεται στην θέση 3.
5. Συμβολίζουμε με U_n την ομάδα των n -στών ριζών της μονάδας, όπου $n = 5\alpha + \beta$. Βρείτε όλους τους γεννήτορες της U_n και κατασκευάστε το δικτυωτό διάγραμμα υποομάδων της U_n .
6. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} x \equiv \beta \pmod{5}, \\ x \equiv \alpha \pmod{3}, \\ x \equiv \alpha + \beta \pmod{7}. \end{cases}$$

7. Αν R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και I ιδεώδες του R , δείξτε ότι το σύνολο

$$J = \{x \in R : x^n \in I \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}\}$$

είναι ιδεώδες του R .

8. Έστω G_1, G_2, \dots μια οικογένεια αβελιανών υποομάδων μιας ομάδας G . Αν $H = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, δείξτε ότι η H είναι αβελιανή υποομάδα της G .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!