



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3^ο χλμ.Π.Ε.Ο. Λαμίας-Αθηνών, 35 100, Λαμία, Τηλ: 2231060196
E-mail: g-math@uth.gr

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΗΛΙΑΣ ΤΕΡΓΙΑΚΙΔΗΣ
ΤΡΙΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ 1

Να αποδειχθεί η παρακάτω Πρόταση.

Η απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών l_1 και l_2 του Ευκλείδειου χώρου $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ δίνεται από τον

$$\text{τύπο } d = \frac{|\det(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|_0},$$

όπου P_i είναι τυχαίο σημείο της l_i και \vec{u}_i είναι διάνυσμα διεύθυνσης της l_i , $i = 1, 2$. **(1,5 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τις ευθείες του $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ με παραμετρικές εξισώσεις

$$l_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda, \\ z = 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad l_2 : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = \mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

(α) Να οριστεί ένα διάνυσμα \vec{u} παράλληλο στην l_1 και ένα διάνυσμα \vec{v} παράλληλο στην l_2 και να βρείτε το διανυσματικό τους γινόμενο $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. **(0,5 Μονάδες)**

(β) Να εξεταστεί η σχετική θέση των ευθειών l_1 και l_2 . **(0,5 Μονάδες)**

(γ) Να βρεθεί η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου Π , που διέρχεται από την ευθεία l_1 και είναι παράλληλο στο διάνυσμα \vec{n} και να αποδειχθεί ότι τέμνει την ευθεία l_2 σε ένα μόνο σημείο P , το οποίο και να υπολογιστεί. **(1,5 Μονάδες)**

(δ) Βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της κοινής καθέτου των ευθειών l_1 και l_2 και την ελάχιστη απόστασή τους.

(1,5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 3

(α) Θεωρούμε το Ευκλείδειο επίπεδο $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$.

(1) Ποιά είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων του \mathbb{R}^2 που σχηματίζουν μία υπερβολή \mathcal{Y} ; Αποδείξτε ότι η κανονική εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.

(1 Μονάδα)

(2) Έστω g και g' οι ασύμπτωτες της \mathcal{Y} . Δώστε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι ευθείες g και g' να είναι κάθετες. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η υπερβολή \mathcal{Y} είναι ισοσκελής.

(0,5 Μονάδες)

(3) Ποιά είναι η τιμή της εκκεντρότητας μίας ισοσκελούς υπερβολής; (0,5 Μονάδες)

(β) Να αποδειχθεί η εστιακή ιδιότητα της υπερβολής και να γίνει το σχετικό σχήμα.

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ενός σημείου M μίας υπερβολής \mathcal{Y} από τις εστίες της είναι σταθερή και ίση με $2a$, όπου $a > 0$ είναι η απόσταση των κορυφών της \mathcal{Y} από το κέντρο της. Αντίστροφα, κάθε σημείο P του επιπέδου που η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του από τις εστίες F και F' της \mathcal{Y} είναι ίση με $2a$ είναι σημείο της \mathcal{Y} . (1,5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το ελλειψοειδές $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Να βρεθούν τα σημεία του ελλειψοειδούς, στα οποία τα εφαπτόμενα επίπεδα του ελλειψοειδούς τέμνουν τους άξονες των συντεταγμένων, σε σημεία που ισαπέχουν από το κέντρο $O(0,0,0)$ του ελλειψοειδούς. (1 Μονάδα)