



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Εξεταζόμενο μάθημα: Ευκλείδεια Γεωμετρία και μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες**  
**Λαμία, 16 Ιουνίου 2021**  
**Μ. Σταθά**

- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες (συμπεριλαμβανομένης της υποβολής).
- Αποθηκεύστε το pdf με τις λύσεις, με το όνομά σας.

**Θέμα 1.**

(α) Να αναφέρετε τις πέντε κατηγορίες των αξιωμάτων του Hilbert και να αναπτύξετε την κατηγορία των αξιωμάτων που μας επιτρέπει να μετράμε. [10]

(β) Είναι δυνατόν δύο διαφορετικές ευθείες να έχουν δύο διαφορετικά κοινά σημεία; Τεκμηριώστε την απάντησή σας βασιζόμενοι στην αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σύμφωνα με τον Hilbert. [15]

**Θέμα 2.**

(α) Δώστε τον ορισμό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του  $\mathbb{R}^n$  σύμφωνα με το Klein. [05]

(β) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της ισομετρίας για να αποδείξετε ότι μια ισομετρία του  $\mathbb{R}^2$  απεικονίζει κύκλους σε κύκλους. [15]

(γ) Έστω  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  μια ορθκανονική βάση του  $\mathbb{R}^4$  και  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  γραμμική απεικόνιση, η οποία ορίζεται από τις σχέσεις  $f(u_1) = -u_2$ ,  $f(u_2) = u_3$ ,  $f(u_3) = u_4$ ,  $f(u_4) = -u_1$ . Να εξεταστεί αν η  $f$  είναι ισομετρία. [15]

**Θέμα 3.**

(α) Γράψτε την άρνηση του 5ου αξιώματος του Ευκλείδη που ισχύει στην Ελλειπτική Γεωμετρία. [05]

(β) Αποδείξτε ότι το εμβαδό ενός σφαιρικού τριγώνου με γωνίες  $\alpha, \beta, \gamma$  ισούται με  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ . [15]

**Θέμα 4.**

(α) Να περιγράψετε και να σχεδιάσετε τις υπερβολικές ευθείες στο άνω ημιεπίπεδο του Poincare  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ . [10]

(β) Αποδείξτε ότι δύο διαφορετικά σημεία του  $\mathcal{H}$  ορίζουν μοναδική υπερβολική ευθεία. [10]

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**