



Διευκρινήσεις

- Στις εκφωνήσεις των θεμάτων εμφανίζονται οι αριθμοί α και β . Οι αριθμοί υπολογίζονται προσωπικά ως εξής: Ο α είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του ΑΜ σας και ο β το προτελευταίο. Αν ο ΑΜ σας έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό ψηφίο, τότε $\alpha = \beta$. Π.χ. αν ο ΑΜ σας είναι 140105, τότε $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, ενώ αν ο ΑΜ σας είναι 00050, τότε $\alpha = \beta = 5$. Πριν τις απαντήσεις, σημειώστε στην κόλλα σας την τιμή των α και β για την περίπτωση σας.
- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά.
- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και άριστα είναι το 10.

Θέματα

1. Έστω $G = \langle g \rangle$ κυκλική ομάδα τάξης $4\alpha + 2\beta$. Ποιοι και πόσοι είναι οι γεννήτορες της G ; Κατασκευάστε το δικτυωτό διάγραμμα υποομάδων της G .
2. Αν $m = 40\alpha + 17\beta$, πόσοι αριθμοί στο διάστημα $1 \leq n \leq m$ ικανοποιούν την σχέση $\text{εκπ}(m, n) < mn$;
3. Έστω $n = 5\alpha\beta$. Αν R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $x \in R$ τέτοιο ώστε $x^n = 0$, δείξτε ότι τα στοιχεία $1 + x^{\alpha\beta}$ και $1 - x^\beta$ είναι αντιστρέψιμα στον R .
4. Έστω G_1, G_2, \dots μια οικογένεια κυκλικών υποομάδων της ομάδας G . Αν $H = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, δείξτε ότι η H είναι κυκλική υποομάδα της G .
5. Τι ημέρα της εβδομάδας είχαμε πριν από $25^{100\alpha+101\beta}$ ημέρες; Υποθέστε ότι σήμερα είναι Παρασκευή.
6. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x \equiv \beta \pmod{17}, \\ \beta x \equiv 10 \pmod{11}. \end{cases}$$
7. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(x) = x^2 + \beta x + \alpha$ και $g(x) = x^3 + \alpha x - \beta$. Παραγοντοποιήστε το f πάνω από το \mathbb{Q} , το \mathbb{R} και το \mathbb{C} και στην συνέχεια παραγοντοποιήστε το g πάνω από το \mathbb{Q} και το \mathbb{Z}_3 .
8. Θεωρούμε τις εξής μεταθέσεις της S_5 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την μετάθεση $x = \tau^{20\alpha+7\beta}\sigma$ και γράψτε την ως γινόμενο ξένων κύκλων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!