



Διευκρινήσεις

- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά.
- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και άριστα είναι το 10.
- Σωστή θεωρείται μια απάντηση που, εκτός του σωστού αποτελέσματος, περιλαμβάνει και πλήρης τεκμηρίωση.

Θέματα

1. (α') Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι p τέτοιοι ώστε ο $p + 9$ να είναι πρώτος.
 (β') Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{8}, \\ x \equiv 11 \pmod{17}. \end{cases}$$

2. Δίνεται το σύνολο

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- (α') Είναι το R υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{Z})$;
 (β') Είναι η απεικόνιση

$$\phi : R \rightarrow \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto a + b$$

ομομορφισμός δακτυλίων; Αν ναι, είναι μονομορφισμός, επιμορφισμός ή/και ισομορφισμός;

- (γ') Θεωρείστε γνωστό ότι το σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ εφοδιασμένο με την κατά συντεταγμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό είναι δακτύλιος με μονάδα το $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Υπάρχει επιμορφισμός $\phi : R \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$.

3. (α') Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, τέτοιος ώστε αν $I \trianglelefteq R$, τότε $I = \{0\}$ ή $I = R$. Δείξτε ότι R σώμα.
 (β') Παραγοντοποιήστε το πολυώνυμο $x^4 - 12$ πάνω από το \mathbb{Q} , πάνω από το \mathbb{R} και πάνω από το \mathbb{C} .
4. Έστω G ομάδα τάξης μικρότερης του 140 και H, K υποομάδες της τάξης 8 και 9 αντίστοιχα.
 (α') Βρείτε την τάξη της G .
 (β') Δείξτε ότι $[G : H \cap K] = [G : H] \cdot [G : K]$.
 (γ') Δείξτε ότι κάθε $x \in G$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = hk$, όπου $h \in H$ και $k \in K$.

Υπόδειξη: Ποια είναι η τάξη του συνόλου HK ;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!