



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξεταζόμενο μάθημα: Προβολική Γεωμετρία
Λαμία, 30 Ιουνίου 2021
Μ. Σταθά

- Η διάρκεια της εξέτασης είναι **2:30** ώρες (συμπεριλαμβανομένης της υποβολής).
- Αποθηκεύστε το pdf με τις λύσεις, με το όνομά σας.

Θέμα 1.

(α) Δώστε τον ορισμό του συσχετισμένου επιπέδου. [10]

(β) Εξετάστε εάν η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{P} = \{P = (x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, \mathcal{L} το εσωτερικό των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ και $\mathcal{I} = " \in "$, είναι συσχετισμένο επίπεδο. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. [10]

Θέμα 2.

(α) Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα προβολικό επίπεδο. Αποδείξτε ότι από κάθε σημείο του προβολικού επιπέδου διέρχονται τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ευθείες. [15]

(β) Διατυπώστε τη δυϊκή πρόταση του ερωτήματος (α). [05]

Θέμα 3.

Έστω $(\varphi, \psi) : (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{I}_1) \rightarrow (\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{I}_2)$ μορφισμός προβολικών επιπέδων. Αποδείξτε ότι εάν η φ είναι 1-1, τότε για κάθε $A, B \in \mathcal{P}_1$ με $A \neq B$ ισχύει ότι $\psi(A \vee B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$. [10]

Θέμα 4.

(α) Δίνεται το συσχετισμένο επίπεδο των τεσσάρων σημείων $\mathcal{S} = (\{A, B, \Gamma, \Delta\}, \{AB, A\Gamma, A\Delta, B\Gamma, B\Delta, \Gamma\Delta\}, \in)$. Αποδείξτε ότι η πλήρωση του \mathcal{S} είναι το προβολικό επίπεδο των επτά σημείων. [15]

(β) Δώστε τον ορισμό της ομολογίας. [05]

(γ) Αποδείξτε ότι η ομάδα των ομολογιών του προβολικού επιπέδου των επτά σημείων είναι τετριμμένη. [15]

Θέμα 5.

Να βρεθεί η ευθεία που ορίζουν τα σημεία

- (i) $[1, 0, -2]$ και $[-4, 0, 8]$
(ii) $[2, 1, 3]$ και $[1, 0, -1]$ [15]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ