



### Διευκρινήσεις

- Στις εκφωνήσεις των θεμάτων εμφανίζονται οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$ . Οι αριθμοί υπολογίζονται προσωπικά ως εξής: Ο  $\alpha$  είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του ΑΜ σας και ο  $\beta$  το προτελευταίο. Αν ο ΑΜ σας έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό ψηφίο, τότε  $\alpha = \beta$ . Π.χ. αν ο ΑΜ σας είναι 140105, τότε  $\alpha = 5$  και  $\beta = 1$ , ενώ αν ο ΑΜ σας είναι 00050, τότε  $\alpha = \beta = 5$ . Πριν τις απαντήσεις, σημειώστε στην κόλλα σας την τιμή των  $\alpha$  και  $\beta$  για την περίπτωση σας.
- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά.
- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και άριστα είναι το 10.

### Θέματα

1. Έστω  $d = \mu\kappa\delta(\alpha + \beta, 210)$ . Βρείτε ένα σώμα  $F$ , τέτοιο ώστε να υπάρχουν ακριβώς  $d$  μονικά ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 1 πάνω από το  $F$ , ή εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει τέτοιο σώμα.
2. Αν  $n = \alpha + \beta$ , θεωρείστε την απεικόνιση  $\phi : \mathbb{Z}_{210} \rightarrow \mathbb{Z}_n, [x]_{210} \mapsto [x]_n$ . Εξετάστε αν η  $\phi$  είναι ομομορφισμός δακτυλίων και, αν ναι, βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της και αποφανθείτε κατά πόσο είναι επιμορφισμός, μονομορφισμός ή ισομορφισμός.
3. Έστω  $m = 12 + \alpha + \beta$ . Εξετάστε αν ο δακτύλιος  $\mathbb{Z}_m$  είναι σώμα ή/και ακέραια περιοχή. Βρείτε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου  $\mathbb{Z}_m$  και κατασκευάστε το δικτυωτό διάγραμμα υποομάδων της προσθετικής ομάδας  $\mathbb{Z}_m$ .

4. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha\beta x \equiv 1 \pmod{11}, \\ x \equiv 7^{15\alpha} \pmod{15}. \end{cases}$$

5. Θεωρούμε τις εξής μεταθέσεις της  $S_5$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την μετάθεση  $x = \sigma^{7\alpha+6\beta}\tau^{-\beta}$  και γράψτε την ως γινόμενο ξένων κύκλων.

6. Βρείτε όλα τα ζεύγη αριθμών  $x, y \in \mathbb{Z}$ , με τις ιδιότητες  $\mu\kappa\delta(x, y) = \beta$  και  $xy = 10\alpha\beta^2$ .
7. Έστω  $G$  αβελιανή και μη κυκλική ομάδα τάξης  $n$  και  $g \in G$ , τέτοιο ώστε  $\text{ord}(g) = 8 + \alpha$ . Βρείτε την ελάχιστη τιμή του  $n$  και, αν  $H = \langle g^\beta \rangle$ , δείξτε ότι  $H \trianglelefteq G$  και υπολογίστε τον αριθμό  $[G : H]$ .
8. Θεωρούμε το ιδεώδες  $I = \langle \beta x - \alpha \rangle$  του δακτυλίου  $\mathbb{Q}[x]$ . Εξετάστε αν ο δακτύλιος πηλίκο  $\mathbb{Q}[x]/I$  είναι σώμα ή/και ακέραια περιοχή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**