



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3^ο χλμ.Π.Ε.Ο. Λαμίας-Αθηνών, 35 100, Λαμία, Τηλ: 2231060196
E-mail: g-math@uth.gr

Θέματα Θ2 , Θεωρία Μέτρου , 17 Ιουνίου 2022

Θέμα πρώτο (3 μονάδες)

- A) Να δώσετε τους ορισμούς των παρακάτω εννοιών
(i) μιας μετρήσιμης συνάρτησης που παίρνει μιγαδικές τιμές (ii) του ολοκληρώματος Lebesgue , μιας θετικής , μετρήσιμης συνάρτησης .
(1 μονάδα)
B) Να διατυπώσετε το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue .
(1 μονάδα)
Γ) Να δώσετε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue στο \mathbb{R}^2 .
(1 μονάδα)

Θέμα δεύτερο (1 μονάδα)

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{2022\}$, υποσύνολο του συνόλου \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών , και έστω $\Phi = \{A\}$.
Να προσδιορίσετε την ελάχιστη σ-Άλγεβρα $\sigma(\Phi)$.

Θέμα τρίτο (2 μονάδες)

Θεωρούμε τα εξής υποσύνολα του \mathbb{R} :

$$A = [-7, -4) \cup (2, 5] , B = [-3, 1) \cup (7, 10] \text{ και} \\ \Gamma = [-5, 0] \cup [3, 8] \text{ και την συνάρτηση}$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής :

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{αν } x \in A \\ -1 & \text{αν } x \in B \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (B \cup A) \end{cases}$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} f d\lambda$.

Θέμα τέταρτο (2 μονάδες)

Θεωρούμε τα υποσύνολα του \mathbb{R}

$A_n = [2n - 1, 2n]$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$.Θεωρούμε την συνάρτηση

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής :

$$f(x) = \frac{2021}{2023^n} \text{ αν } x \in A_n \text{ για κάποιο } n = 1, 2, \dots$$

και $f(x) =$

0 αν το x δεν ανήκει σε κανένα σύνολο A_n , για $n = 1, 2, \dots$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f d\lambda$.

Θέμα πέμπτο (2 μονάδες)

Έστω $A = \{0, 1, 2, \dots, 2022\}$.Θεωρούμε την

συνάρτηση $f: [0, 2022] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής

$$f(x) = \frac{1}{2022^{2022}} x^{2021} , \text{ αν } x \in [0, 2022] \setminus A , \text{ και}$$

$f(x) = -2022 , \text{ αν } x \in A$. Να εξηγήσετε γιατί η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Riemann της f .

Καλή επιτυχία
