



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

3^ο χλμ.Π.Ε.Ο. Λαμίας-Αθηνών, 35 100, Λαμία, Τηλ: 2231060196
E-mail: g-math@uth.gr

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ II - ΙΟΥΝΙΟΣ 2022

ΘΕΜΑ 1:

- (i) Έστω $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη και $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$, δείξτε τότε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = f(x_0)$.
(ii) Έστω $G(x) = \int_0^x e^t \cos(x-t)dt$. Βρείτε την $G'(x)$.

ΘΕΜΑ 2:

- (i) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{2+3x^3}$.
Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης;
(ii) Βρείτε το πολυώνυμο και το υπόλοιπο Taylor τάξης 5 της f του ερωτήματος (i).

ΘΕΜΑ 3:

Έστω η ακολουθία συναρτήσεων:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ και } f_n(0) = 0, n=1,2,3,\dots \text{ Αφού ορίσετε τις έννοιες, κατά}$$

σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση, ακολουθίας συναρτήσεων, δείξτε ότι η ανωτέρω ακολουθία συγκλίνει κατά σημείο και όχι ομοιόμορφα σε συνάρτηση $f(x)$ την οποία και να βρείτε. Ισχύει η ισότητα $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$; Τι σχόλια έχετε να κάνετε σχετικά με την ισότητα αυτή;

ΘΕΜΑ 4:

- (i) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + \cos n}{2^n + n^2 + 1}, \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + \cos \frac{\pi n}{3})^{\frac{1}{2}}}{(n^3 + 2n + 10)^{\frac{1}{2}} - 3 \sin n}.$$

- (ii) Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} f(x)dx$, όπου,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2x^2 - x + \frac{5}{8}}, & 1 < x \end{cases}.$$