



Διευκρινήσεις

- Στις εκφωνήσεις των θεμάτων εμφανίζονται οι αριθμοί α και β . Οι αριθμοί υπολογίζονται προσωπικά ως εξής: Ο α είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του ΑΜ σας και ο β το προτελευταίο. Αν ο ΑΜ σας έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό ψηφίο, τότε $\alpha = \beta$. Π.χ. αν ο ΑΜ σας είναι 140105, τότε $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, ενώ αν ο ΑΜ σας είναι 00050, τότε $\alpha = \beta = 5$. Πριν τις απαντήσεις, σημειώστε στην κόλλα σας την τιμή των α και β για την περίπτωση σας.
- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά.
- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και άριστα είναι το 10.

Θέματα

1. Αν $m = 10\alpha + 20\beta$, πόσοι αριθμοί στο διάστημα $1 \leq n \leq m$ ικανοποιούν την σχέση $\mu\kappa\delta(m, n) = 2$;
2. Θεωρούμε τις εξής μεταθέσεις της S_6 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ και } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την μετάθεση $y = \tau^{10\alpha+2\beta}\sigma^{-\beta}$ και γράψτε την ως γινόμενο ξένων κύκλων.

3. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x \equiv \beta \pmod{13}, \\ x \equiv 5^{45\alpha} \pmod{12}. \end{cases}$$

4. Θεωρούμε το ιδεώδες $I = \langle x - \alpha^2\beta \rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$. Εξετάστε αν το I είναι πρώτο ή/και μεγιστικό.
5. Αν $m = 2\alpha$ και $n = 2\beta$, θεωρείστε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n, [x]_m \mapsto [x]_n$. Εξετάστε αν η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και, αν ναι, βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της και αποφανθείτε κατά πόσο είναι επιμορφισμός, μονομορφισμός ή ισομορφισμός.
6. Έστω G κυκλική ομάδα τάξης n και $g \in G$, στοιχείο που δεν είναι γεννήτορας, τέτοιο ώστε $\text{ord}(g) = 10 + \alpha$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του n και, αν $H = \langle g^\beta \rangle$, δείξτε ότι $H \trianglelefteq G$ και υπολογίστε τον αριθμό $[G : H]$.
7. Βρείτε ένα σώμα F , τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 4 πάνω από το F .
8. Έστω $m = 15 + \alpha - \beta$. Εξετάστε αν ο δακτύλιος \mathbb{Z}_m είναι σώμα ή/και ακέραια περιοχή. Βρείτε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου \mathbb{Z}_m και βρείτε (ή περιγράψτε επαρκώς) τους γεννήτορες της ομάδας \mathbb{Z}_m^* αν αυτή είναι κυκλική.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!