



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**Εξεταζόμενο μάθημα: Διαφορική Γεωμετρία Πολλαπλοτήτων**  
**Λαμία, 15 Ιουνίου 2022**  
**Μ. Σταθά**

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Λύστε τα θέματα 1,2,3 και 4 ή το θέμα 5 και δύο από τα θέματα 1,2,3,4.

**Θέμα 1.**

- (α) Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss μιας επιφάνειας ελάχιστης έκτασης είναι παντού μη-θετική. [10]
- (β) Έστω  $p \in M$  ένα ομφαλικό σημείο μιας επιφάνειας  $M$ . Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss στο  $p$  είναι μη-αρνητική. [05]
- (γ) Δείξτε ότι ένα σημείο  $p \in M$  είναι ομφαλικό εάν και μόνο εάν η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα ικανοποιούν τη σχέση  $H^2 = K$ . [10]

**Θέμα 2.**

- (α) Έστω  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  μια παραμέτρηση μιας επιφάνειας  $M$ , τέτοια ώστε  $\frac{\partial G}{\partial v} = 0$  και  $\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2\partial F}{\partial v}$ . Δείξτε ότι οι  $v$ -παραμετρικές καμπύλες είναι γεωδαισιακές της  $M$ . [15]
- (β) Έστω  $\gamma_1, \gamma_2$  δύο γεωδαισιακές καμπύλες που διέρχονται από το ίδιο σημείο  $p$  μιας επιφάνειας  $M$  με καμπυλότητα Gauss  $K \leq 0$ . Αποδείξτε ότι οι  $\gamma_1, \gamma_2$  δεν μπορούν να έχουν άλλο κοινό σημείο έτσι ώστε να περικλείουν ένα απλά συνεκτικό χωρίο  $D$ . [10]

**Θέμα 3.**

- (α) Δώστε τον ορισμό της τοπολογικής πολλαπλότητας και της λείας πολλαπλότητας διάστασης  $n$ . [05]
- (β) Αποδείξτε ότι ο σταυρός  $M$  (σχήμα) στον  $\mathbb{R}^2$  με την επαγόμενη τοπολογία του  $\mathbb{R}^2$  δεν είναι τοπολογική πολλαπλότητα στο σημείο  $p \in M$ . [10]
- (γ) Αποδείξτε ότι το σύνολο  $\text{Gl}_n \mathbb{R} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$  είναι λεία πολλαπλότητα διάστασης  $n^2$ . [10]

**Θέμα 4.**

- (α) Έστω  $M_1, M_2$  λείες πολλαπλότητες,  $p \in M_1$  και  $F : M_1 \rightarrow M_2$  λεία απεικόνιση. Να δώσετε τον ορισμό του διαφορικού  $dF_p : T_p M_1 \rightarrow T_{F(p)} M_2$ . [10]
- (β) Έστω  $L_g : \text{Gl}_n \mathbb{R} \rightarrow \text{Gl}_n \mathbb{R}$  η αριστερή μεταφορά κατά  $g \in \text{Gl}_n \mathbb{R}$ , δηλαδή  $L_g(A) = gA$ . Να υπολογίσετε το διαφορικό της  $L_g$  στο σημείο  $I_n$  (ταυτοτικός πίνακας). [15]

**Θέμα 5.**

- Αποδείξτε ότι ο πραγματικός προβολικός χώρος  $\mathbb{RP}^2$  είναι λεία πολλαπλότητα διάστασης 2. [50]

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

### Τυπολόγιο

$$k_g(s) = \sqrt{EG - F^2} \det \begin{pmatrix} \dot{u} & \ddot{u} + \dot{u}^2 \Gamma_{11}^1 + 2\dot{u}\dot{v} \Gamma_{12}^1 + \dot{v}^2 \Gamma_{22}^1 \\ \dot{v} & \ddot{v} + \dot{v}^2 \Gamma_{22}^2 + 2\dot{u}\dot{v} \Gamma_{12}^2 + \dot{u}^2 \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Γεωδαισιακή καμπυλότητα των } u\text{-παραμετρικών γραμμών } (k_g(s))_u = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}} \Gamma_{11}^2$$

$$\text{Γεωδαισιακή καμπυλότητα των } v\text{-παραμετρικών γραμμών } (k_g(s))_v = -\frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}} \Gamma_{22}^1$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( \frac{GE_u}{2} - FF_u + \frac{FE_v}{2} \right) & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( -\frac{FE_u}{2} + EF_u - \frac{EE_v}{2} \right) \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( \frac{GE_v}{2} - \frac{FG_u}{2} \right) & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( -\frac{FE_v}{2} + \frac{EG_u}{2} \right) \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( GF_v - \frac{GG_u}{2} - \frac{FG_v}{2} \right) & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{EG - F^2} \left( -FF_v + \frac{FG_u}{2} + \frac{EG_v}{2} \right) \end{aligned}$$