



Διευκρινήσεις

- Στις εκφωνήσεις των θεμάτων εμφανίζονται οι αριθμοί α και β . Οι αριθμοί υπολογίζονται προσωπικά ως εξής: Ο α είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του ΑΜ σας και ο β το προτελευταίο. Αν ο ΑΜ σας έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό ψηφίο, τότε $\alpha = \beta$. Π.χ. αν ο ΑΜ σας είναι 140105, τότε $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, ενώ αν ο ΑΜ σας είναι 00050, τότε $\alpha = \beta = 5$. Πριν τις απαντήσεις, σημειώστε στην κόλλα σας την τιμή των α και β για την περίπτωση σας.
- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά.
- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και άριστα είναι το 10.

Θέματα

1. Έστω F σώμα χαρακτηριστικής 0, δείξτε ότι υπάρχουν άπειρα ανάγωγα πολώνυμα βαθμού ≤ 3 πάνω από το F .
2. Αν $m = \alpha + \beta$ και $n = 2\alpha + \beta$, θεωρήστε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n, [x]_m \mapsto [x]_n$. Εξετάστε αν η ϕ είναι ομομορφισμός δακτυλίων και, αν ναι, βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της και αποφανθείτε κατά πόσο είναι επιμορφισμός, μονομορφισμός ή ισομορφισμός.
3. Θεωρούμε το ιδεώδες $I = \langle \alpha x + \beta \rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{Q}[x]$. Εξετάστε αν το I είναι πρώτο ή/και μεγιστικό.
4. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x \equiv \beta \pmod{17}, \\ \beta x \equiv 4^{40\alpha} \pmod{11}. \end{cases}$$

5. Αν $m = 30\alpha + \beta$, πόσοι αριθμοί στο διάστημα $1 \leq n \leq m$ ικανοποιούν την σχέση $\mu\kappa\delta(m, n) > 1$;
6. Έστω $m = 10 + \alpha + \beta$. Εξετάστε αν ο δακτύλιος \mathbb{Z}_m είναι σώμα ή/και ακέραια περιοχή. Βρείτε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου \mathbb{Z}_m και βρείτε (ή περιγράψτε επαρκώς) τους γεννήτορες της ομάδας \mathbb{Z}_m^* αν αυτή είναι κυκλική.
7. Θεωρούμε τις εξής μεταθέσεις της S_5 :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ και } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την μετάθεση $x = \tau^{50\alpha+7\beta} \rho^{-\alpha}$ και γράψτε την ως γινόμενο ξένων κύκλων.

8. Έστω G ομάδα τάξης n και $g_1, g_2 \in G$ τέτοια ώστε $\text{ord}(g_1) = \alpha + \beta$ και $\text{ord}(g_2) = 23$. Αν $H = \langle g_1 \rangle \cap \langle g_2 \rangle$, δείξτε ότι $H \trianglelefteq G$ και υπολογίστε τον αριθμό $[G : H]$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!