



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξεταζόμενο μάθημα: Προβολική Γεωμετρία
Λαμία, 1 Σεπτεμβρίου 2021
Μ. Σταθά

- Η διάρκεια της εξέτασης είναι **2:30** ώρες (συμπεριλαμβανομένης της υποβολής).
- Αποθηκεύστε το pdf με τις λύσεις, με το όνομά σας.

Θέμα 1.

(α) Δώστε τον ορισμό του προβολικού επιπέδου. [10]

(β) Σε κάθε προβολικό επίπεδο υπάρχει ευθεία ε και σημείο A με την ιδιότητα $(A, \varepsilon) \notin \mathcal{I}$. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα και για ένα συχετισμένο επίπεδο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. [10]

Θέμα 2.

(α) Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα προβολικό επίπεδο. Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία του προβολικού επιπέδου περιέχει τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία. [15]

(β) Διατυπώστε τη δυϊκή πρόταση του ερωτήματος (α). [05]

Θέμα 3.

Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα προβολικό επίπεδο.

(α) Δώστε τον ορισμό της σημειοσειράς μιας ευθείας του προβολικού επιπέδου. [05]

(β) Αποδείξτε ότι δύο ευθείες του προβολικού επιπέδου είναι ίσες αν και μόνο αν οι αντίστοιχες σημειοσειρές τους είναι ίσες. [10]

Θέμα 4.

(α) Δίνεται το συχετισμένο επίπεδο των τεσσάρων σημείων $\mathcal{S} = (\{A, B, \Gamma, \Delta\}, \{AB, A\Gamma, A\Delta, B\Gamma, B\Delta, \Gamma\Delta\}, \in)$. Αποδείξτε ότι η πλήρωση του \mathcal{S} είναι το προβολικό επίπεδο των επτά σημείων. [15]

(β) Αποδείξτε ότι η ομάδα των ομολογιών του προβολικού επιπέδου των επτά σημείων είναι τετριμμένη. [15]

Θέμα 5.

Να βρεθεί η τομή των ευθειών

(i) $\langle 1, 0, 0 \rangle$ και $\langle 1, -2, 1 \rangle$

(ii) $\langle 2, -1, 0 \rangle$ και $\langle -1, \frac{1}{2}, 0 \rangle$. [15]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ