



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξεταζόμενο μάθημα: Προβολική Γεωμετρία
Λαμία, 23 Ιουνίου 2022
Μ. Σταθά

Θέμα 1.

- (α) Δώστε τον ορισμό του προβολικού επιπέδου. [05]
- (β) Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα προβολικό επίπεδο. Δείξτε ότι για δύο διαφορετικές ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ υπάρχει μοναδικό σημείο $P \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε $(P, k) \notin \mathcal{I}$ και $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$. [10]
- (γ) Ναδειχθεί το ανάλογο αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) στο συσχετισμένο επίπεδο. [10]

Θέμα 2.

- (α) Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα προβολικό επίπεδο. Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία του προβολικού επιπέδου περιέχει τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία. [20]
- (β) Διατυπώστε τη δυϊκή πρόταση του ερωτήματος (α). [05]

Θέμα 3.

- (α) Να ορίσετε το συσχετισμένο επίπεδο των τεσσάρων σημείων. [05]
- (β) Αποδείξτε ότι η πλήρωση του συσχετισμένου επιπέδου των τεσσάρων σημείων είναι το προβολικό επίπεδο των επτά σημείων. [15]

Θέμα 3.

Έστω $\Pi_i \equiv (\mathcal{P}_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, 2$ προβολικά επίπεδα.

- (α) Δώστε τον ορισμό του μορφισμού μεταξύ των προβολικών επιπέδων Π_1 και Π_2 . [05]
- (β) Έστω $(\varphi, \psi) : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ ένας μορφισμός προβολικών επιπέδων. Εάν η ψ είναι 1-1 δείξτε ότι για κάθε $k, \ell \in \mathcal{L}_1$ με $k \neq \ell$ ισχύει $\varphi(k \wedge \ell) = \psi(k) \wedge \psi(\ell)$. [15]
- (γ) Εάν (θ, ζ) είναι μια κεντρική συγγραμμικότητα του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ με κέντρο $A \in \mathcal{P}$, δείξτε ότι $\theta(A) = A$. [10]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!