



### Διευκρινήσεις

- Στις εκφωνήσεις των θεμάτων εμφανίζονται οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$ . Οι αριθμοί υπολογίζονται προσωπικά ως εξής: Ο  $\alpha$  είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του ΑΜ σας και ο  $\beta$  το προτελευταίο. Αν ο ΑΜ σας έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό ψηφίο, τότε  $\alpha = \beta$ . Π.χ. αν ο ΑΜ σας είναι 140105, τότε  $\alpha = 5$  και  $\beta = 1$ , ενώ αν ο ΑΜ σας είναι 00050, τότε  $\alpha = \beta = 5$ . Πριν τις απαντήσεις, σημειώστε στην κόλλα σας την τιμή των  $\alpha$  και  $\beta$  για την περίπτωση σας.
- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά.
- Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και άριστα είναι το 10.

### Θέματα

1. Αν  $m = \alpha + 4\beta$  και  $n = \alpha$ , θεωρήστε την απεικόνιση  $\phi : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n, [x]_m \mapsto [x]_n$ . Εξετάστε αν η  $\phi$  είναι ομομορφισμός δακτυλίων και, αν ναι, βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της και αποφανθείτε κατά πόσο είναι επιμορφισμός, μονομορφισμός ή ισομορφισμός.

2. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x \equiv \beta \pmod{11}, \\ \beta x \equiv 2^{13\alpha} \pmod{13}. \end{cases}$$

3. Έστω  $m = 10 + \beta$ . Εξετάστε αν ο δακτύλιος  $\mathbb{Z}_m$  είναι σώμα ή/και ακέραια περιοχή. Βρείτε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου  $\mathbb{Z}_m$  και κατασκευάστε το δικτυωτό διάγραμμα υποομάδων της προσθετικής ομάδας  $\mathbb{Z}_m$ .
4. Θεωρούμε τις εξής μεταθέσεις της  $S_5$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την μετάθεση  $x = \sigma^{4\alpha+5\beta}\tau^{-2\alpha}$  και γράψτε την ως γινόμενο ξένων κύκλων.

5. Βρείτε ένα πολυώνυμο  $f \in \mathbb{R}[x]$  ελάχιστου βαθμού, τέτοιο ώστε  $f(\alpha + i\beta) = f(\beta + i\alpha) = 0$ , όπου  $i$  η μιγαδική φανταστική μονάδα.
6. Επιλέξτε έναν πρώτο διαιρέτη  $p$  του αριθμού  $\alpha + \beta$  και σημειώστε τον στην κόλλα σας. Στην συνέχεια δείξτε ότι η απεικόνιση  $\phi : \mathbb{Z}_p[x] \rightarrow \mathbb{Z}_p[x], f \mapsto f'$  (όπου  $f'$  η παράγωγος του πολυωνύμου  $f$ ), είναι ομομορφισμός ομάδων. Αφού βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της αποφανθείτε κατά πόσο η  $\phi$  είναι επιμορφισμός, μονομορφισμός ή ισομορφισμός.
7. Βρείτε όλες τις τριάδες αριθμών  $x, y, z$  με  $0 < x \leq y \leq z$ , με τις ιδιότητες  $\mu\kappa\delta(x, y, z) = \beta$  και  $\epsilon\kappa\pi(x, y, z) = 2\alpha\beta$ .
8. Θεωρούμε το ιδεώδες  $I = \langle x^2 + \alpha \rangle$  του δακτυλίου  $\mathbb{Z}[x]$ . Εξετάστε αν ο δακτύλιος πηλίκου  $\mathbb{Z}[x]/I$  είναι σώμα ή/και ακέραια περιοχή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**