



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1 Ιουλίου 2022

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : Α.Μ

Θέμα 1^ο (2.5μ.)

Έστω το σύστημα $Ax=b$, όπου πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ και διάνυσμα $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- α) Διατυπώστε με σαφήνεια τις επαναληπτικές μεθόδους Jacobi και Gauss-Seidel.
β) Συγκρίνουν οι παραπάνω επαναληπτικές μέθοδοι για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ και γιατί;
γ) Βρείτε 2 επαναλήψεις της μεθόδου Jacobi καθώς και το απόλυτο σφάλμα μεταξύ δυο διαδοχικών προσεγγίσεων σε κάθε επανάληψη με χρήση της νόρμας «άπειρο».

Θέμα 2^ο (2.5μ.)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x + 4$.

- α) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0,1]$.
β) Να γίνουν 3 επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson με αρχική προσέγγιση $x_0=0.5$. Τι ακρίβεια έχουμε σε κάθε βήμα;

Θέμα 3^ο (2μ.)

Να υπολογιστούν οι απαιτούμενες τιμές του πλήθους των υποδιαστημάτων n και του βήματος h για την προσέγγιση του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

με τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου ώστε το σφάλμα της προσέγγισης να είναι $|E| \leq 5 \cdot 10^{-6}$.

Θέμα 4^ο (3μ.)

Έστω το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$y' = t - y, \quad 0 \leq t \leq 5, \quad y(0) = 5.$$

Να λυθεί με τη μέθοδο Runge-Kutta 3^{ης} τάξης για 2 επαναλήψεις με βήμα $h = 0.1$ και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τη θεωρητική λύση $y(t) = 6e^{-t} + t - 1$. Δίνονται οι τύποι της μεθόδου Runge-Kutta 3^{ης} τάξης: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(f_1 + 4f_2 + f_3)$, όπου $f_1 = f(t_i, y_i)$, $f_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f_1)$, και $f_3 = f(t_i + h, y_i - hf_1 + 2hf_2)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ